



# Singularités de frontière et conditions limites absorbantes : le problème du coin

Olivier Vacus

## ► To cite this version:

Olivier Vacus. Singularités de frontière et conditions limites absorbantes : le problème du coin. [Rapport de recherche] RR-2851, INRIA. 1996. inria-00073840

**HAL Id: inria-00073840**

**<https://hal.inria.fr/inria-00073840>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Singularités de frontière et  
conditions limites absorbantes :  
le problème du coin*

Olivier Vacus

**N° 2851**

Mars 1996

\_\_\_\_\_ THÈME 4 \_\_\_\_\_

 *apport  
de recherche*  




# Singularités de frontière et conditions limites absorbantes : le problème du coin

Olivier Vacus\*

Thème 4 — Simulation  
et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Ondes

Rapport de recherche n° 2851 — Mars 1996 — 79 pages

**Résumé :** Ce rapport constitue une généralisation de la solution au problème du coin apportée par Bamberger, Joly, Roberts et une alternative à la solution proposée par Collino dans [3].

Dans un premier temps, on constate que la démonstration de l'existence d'une solution infiniment régulière est possible dans certain cas. Nous démontrons ensuite la décroissance de certaines énergies "d'ordre supérieur" à celui des conditions de bords, résultats à rapprocher de ceux de Ha Duong et Joly ou de Dong Woo Sheen, ce qui établit en particulier l'unicité des solutions régulières.

Enfin, on aborde l'épineuse question des conditions de coins, destinées à assurer la régularité des solutions ; nous montrons comment déterminer à tout ordre de telles conditions.

**Mots-clé :** Equation des ondes - Conditions aux limites - Problèmes hyperboliques mixtes - Singularités de frontières - Estimations a priori.

*(Abstract: pto)*

INRIA, Domaine de Voluceau, B.P.105 78153 Le Chesnay cedex, France.

Unité de recherche INRIA Rocquencourt

Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

Téléphone : (33 1) 39 63 55 11 – Télécopie : (33 1) 39 63 53 30

# Singularities of the Calculus Domain's Boundary and Absorbing Boundary Conditions : the Corner Problem

**Abstract:** Our work can be seen as a alternative to the results of F. Collino in [3] about the absorbing boundary conditions (ABC) of high order for the wave equation. We try to generalize the solution to the corner problem due to Bamberger, Joly, Roberts for the second order condition ([2]).

In a first step, we see that the proof of the existence of a very smooth solution can be easily generalized. We show then the decay in time of energies of higher order than the order of the ABC, using methods close to those of Joly and Ha Duong or Dong Woo Sheen works. It guarantees the uniqueness of the smooth solutions.

Finally, we reach the puzzling question of the corner conditions. We show that such conditions exist at any order, how many they are, and we give an algorithm to compute them.

**Key-words:** Wave equation - Boundary conditions - Mixed hyperbolic problems - Singularities of the boundary - Energy estimates.

# Chapitre 1

## Introduction

On peut dire qu'on aborde dans ce rapport le dernier volet de l'étude théorique de la stabilité des conditions limites absorbantes (CLA) pour l'équation des ondes en dimension 2.

Dans un premier temps en effet, Engquist et Majda pour les approximations de Padé, puis Trefethen et Halpern dans le cas général ont étudié cette stabilité dans le cas d'un bord droit, ceci en usant du critère de Kreiss ([6] et [15]). Par la suite, leurs résultats ont été établis de nouveau par Ha Duong et Joly non plus à l'aide d'un critère algébrique, mais par la mise au point de techniques énergétiques ([5]). Sous une forme générale, ils s'énoncent ainsi :

*Sur un bord droit infini, de normale sortante selon  $(Oy)$ , un opérateur de la forme*

$$B_N^{t,y} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right) \prod_{k=1}^N \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \prod_{j \neq k} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

*est celui d'une CLA stable pour l'équation des ondes si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N < 1 \\ \beta_k \geq 0, \ 1 \leq k \leq N \\ \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} < \gamma \end{array} \right.$$

Les méthodes de type énergétiques ont été ensuite reprise ou adaptée au cas des coefficients variables ou des bords courbes ([10]), et même à des problèmes en fréquence (stabilité des conditions de bords pour l'équation de Helmholtz : [9]). Il restait à considérer le problème des coins, problème qui soulèvent des difficultés tant pratiques que théoriques. Mais comme de fait tous les domaines de calcul définis sur ordinateurs présentent des coins, il s'agit d'un problème fondamental. A ce titre, il a fait l'objet de diverses études, parmi lesquelles, chronologiquement, figurent les trois suivantes.

La première est due à Alain Bamberger, Patrick Joly et Jean Roberts qui ont mené une étude très complète dans le cas de conditions absorbantes d'ordre 2 ([2]). Ce sont leurs travaux qui ont été notre point de départ. Ils ont étudiés la solution du problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

D'un point de vue théorique, ils montrent que l'adjonction d'une condition de coin est nécessaire pour pouvoir mener à bien l'analyse mathématique de leur problème, par exemple une condition de la forme :

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 .$$

Ceci fait, ils démontrent l'existence et l'unicité des solutions du nouveau problème. Ils déterminent également une condition de coin particulière ( $\gamma =$

$\frac{3}{2}$ ) qu'ils montrent être optimale dans un sens qu'ils précisent. Notons dès à présent que cette condition est "déduite" des autres équations du problème; ce type de conditions sera noté par la suite "CCC" pour "conditions de coin par compatibilité".

S'inspirant des travaux de Tuong Ha Duong et Patrick Joly dans [5], Dong Woo Sheen a lui mis en oeuvre la technique des éléments finis, toujours pour le problème du coin avec des conditions absorbantes du second ordre ([13],[14] et [12]). Il s'appuie pour cela sur l'existence d'énergies d'ordre 3 – donc supérieur à l'ordre des conditions – qui sont décroissantes en temps. Ses travaux sont assez techniques, et nous n'en ferons qu'une brève présentation au troisième chapitre.

Enfin, le cas des conditions d'ordre élevé en présence de coins a été traité par Francis Collino ([3]) mais pour une formulation du problème légèrement différente: directement inspirée du domaine des équations paraxiales, l'opérateur de la condition de bord s'exprime à l'aide d'une famille de  $L$  fonctions auxiliaires :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{/(y=0)} - \sum_{m=1}^L \beta_m \frac{\partial \varphi_m^{(2)}}{\partial t} = 0 \\ \forall l = 1, \dots, L, \quad \frac{\partial^2 \varphi_l^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi_l^{(2)}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \psi_l^{(2)} = \alpha_l \varphi_l^{(2)} + u_{/(y=0)} \end{array} \right.$$

Nous mentionnons ces travaux, assez différents des nôtres, pour deux raisons. La première, c'est que Collino, en considérant des solutions particulières, a déterminé le premier des jeux de conditions de coins pour des CLA d'ordre élevé, conditions qui lui ont permis une implémentation effective. La seconde, c'est que nos deux approches étant différentes, nous sommes parvenus à des résultats théoriques différents, voire même – par chance – complémentaires: nous avons un résultat d'existence qui lui manque, il a un résultat d'unicité qui nous fait défaut. Nous verrons à la fin de ce rapport quels liens peuvent exister entre nos deux problèmes.

Nous avons en ce qui nous concerne conservé une formulation traditionnelle et cherché à étendre les résultats existants au cas des conditions d'ordre



quelconque, ce qui à notre connaissance restait à faire. Nos résultats sont au nombre de trois et à chacun sera consacré un chapitre de ce rapport.

D’abord, on démontre l’existence d’une solution infiniment régulière au problème du coin pour une famille de CLA englobant les conditions issues des approximations de Padé. Pour ce faire, on généralise la démonstration de [2] dans le cas du second ordre.

Puisqu’une telle solution existe, elle donne un sens à des énergies d’ordre élevé adaptée au problème du coin. Plus précisément, on exhibera des énergies d’ordre  $2N + 1$  pour des conditions de bords d’ordre  $N$ . On étend donc au cas général la première partie des résultats Dong Woo Sheen. Mais notre but n’est pas la construction d’éléments finis : ce résultat nous sert d’abord à assurer l’unicité de la solution régulière.

Ce n’est que dans la dernière partie qu’on aborde l’épineuse question des conditions de coin. Nous nous intéressons aux conditions “déduites par compatibilité”, conditions qu’on sait être vérifiées par les solutions suffisamment régulières. Nous déterminons leur nombre exacte et nous donnons un algorithme qui permet de les expliciter, ce que nous montrons à travers quelques exemples. Un programme MAPLE réalisant cette opération est fourni en annexe.

## Chapitre 2

# Existence de solutions régulières

Après avoir précisé quelles CLA nous allons étudier, nous définissons dans cette partie notre problème type et nous montrons que la démonstration de l'existence de solutions régulières est facile à généraliser.

### 2.1 Préliminaires

Nous désignons par  $C_N$  la CLA d'ordre  $N$ , par  $B_N^{t,x}$  l'opérateur de cette condition pour un bord de normale  $\vec{i}$  et par  $B_N^{t,y}$  l'opérateur de cette condition pour un bord de normale  $\vec{j}$ .

Par commodité, la démonstration que nous allons donner dans ce chapitre est celle d'un cas particulier ; nous allons considérer dans la suite de cette partie les CLA issues des approximations de Padé. Rappelons que l'opérateur de ces CLA peut se définir par récurrence :

$$(2.1) \quad \begin{cases} B_1^{t,y}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ B_2^{t,y}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ B_N^{t,y}(u) = \frac{\partial}{\partial t} (B_{N-1}^{t,y}(u)) - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (B_{N-2}^{t,y}(u)) , \forall N > 2 \end{cases}$$

et de manière équivalente

$$(2.2) \quad \begin{cases} B_1^{t,x}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \\ B_2^{t,x}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ B_N^{t,x}(u) = \frac{\partial}{\partial t} (B_{N-1}^{t,x}(u)) - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (B_{N-2}^{t,x}(u)) , \forall N > 2 \end{cases}$$

Rappelons surtout que dans ce cas, pour les solutions régulières de l'équation des ondes, on a les équivalences suivantes :

$$(2.3) \quad B_N^{t,x}(u) \simeq \frac{1}{2^N} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^N \quad \text{et} \quad B_N^{t,y}(u) \simeq \frac{1}{2^N} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^N .$$

Cette propriété est au cœur de notre démonstration.

Pourtant, nous ne pensons pas que cette hypothèse soit restrictive. En effet, il faut d'abord noter que l'extension du résultat serait directe pour les opérateurs du type :

$$(2.4) \quad B_N^{t,y}(u) \simeq \prod_{i=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_i \frac{\partial u}{\partial y} \right)^N \quad \text{avec } \alpha_i > 0, \forall i .$$

Ensuite, il faut revenir aux conditions de stabilité des CLA sur un bord droit. Si on considère un opérateur d'ordre  $N$  de la forme

$$B_N^{t,y} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right) \prod_{k=1}^N \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \prod_{j \neq k} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right]$$

alors, comme nous l'avons rappelé en introduction, cet opérateur est celui d'une CLA stable si et seulement si

$$(2.5) \quad \begin{cases} 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N < 1 \\ \beta_k \geq 0, 1 \leq k \leq N \\ \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} < \gamma \end{cases}$$

Si l'on considère un tel opérateur, il est possible de montrer qu'il est équivalent pour les solutions régulières à

$$(2.6) \quad B_N^{t,y}(u) \simeq \prod_i \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \prod_j \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\mu_j \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + (\mu_j^2 + \nu_j^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

avec  $\lambda_i > 0$  pour tout  $i$ ,  $\mu_j > 0$  pour tout  $j$ .

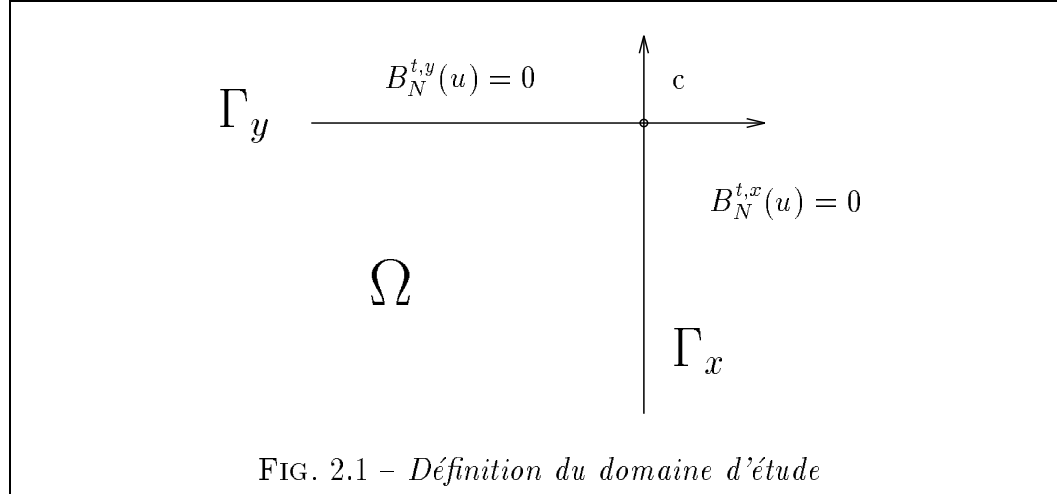
Ce résultat est établi et commenté dans l'annexe A.

Il resterait pour que notre travail soit complet – voir la démonstration proposée ci-dessous – à mener l'étude sur un domaine borné du problème de Cauchy pour les opérateurs du type :

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\mu_j \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + (\mu_j^2 + \nu_j^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Nous ne le ferons pas ici.

## 2.2 Définition du problème



Nous n'allons pas considérer de domaine dans son ensemble, mais seulement le coin supérieur droit d'un domaine. Plus précisément,  $\Omega$  désigne la quart de

plan  $\{x < 0, y < 0\}$ ,  $\Gamma_x$  la demi-droite  $\{x = 0, y < 0\}$  et  $\Gamma_y$  la demi-droite  $\{x < 0, y = 0\}$  ( $\Gamma_x$  et  $\Gamma_y$  sont respectivement de normale sortante  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , les vecteurs de base). Enfin, le point  $C$  est placé à l'origine.

Après les rappels et les précisions apportés au premier paragraphe, le problème à étudier est le suivant :

$$(2.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{1}{2^N} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^N = 0 & \text{sur } (\Gamma_y) \\ \frac{1}{2^N} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^N = 0 & \text{sur } (\Gamma_x) \\ u(x, y, t = 0) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t = 0) = u_1 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

On suppose que les données initiales  $u_0$  et  $u_1$  sont à support strictement inclus dans  $\Omega$  et suffisamment régulières. Pour cela, on prend  $(u_0, u_1) \in D(\Omega) \times D(\Omega)$ .

L'attention du lecteur est attirée sur l'absence, dans la définition de ce premier problème, de conditions spécifiques au coin.

## 2.3 Démonstration de l'existence

La démonstration que nous présentons ici généralise la preuve que l'on peut trouver dans [2] pour le cas  $C_2 \times C_2$ . Si ce travail n'a pas été effectué plus tôt, c'est surtout parce que seul, il n'avait que peu d'intérêt. Trop de résultats manquaient : unicité des solutions, et surtout conditions de coins.

Commençons par un raisonnement purement formel. S'il existait une solution  $u$  au problème (2.8) suffisamment régulière, on pourrait alors considérer la fonction  $v$  définie formellement par :

$$v = \frac{1}{2^{2N}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^N \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right)^N (u) = B_{2N}^t(u).$$

L'idée consiste alors à remarquer que cette fonction  $v$  est nulle par construction sur la frontière de notre domaine, donc solution d'un problème de Cauchy simple, de type équation des ondes avec conditions de Dirichlet. C'est pourquoi on va pouvoir partir de  $v$ , puis essayer d'en déduire  $u$ .

Plus précisément, notre procédé de construction comporte trois étapes :

1. on précise et on étudie le problème qui définit  $v$ .
2. de cette solution  $v$ , on montre comment déduire  $u$ .
3. on vérifie après coup que cette fonction  $u$  est bien solution de notre problème de départ.

### • Etape 1

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$(2.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = 0 & \text{sur } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } (\Gamma_x) \cup (\Gamma_y) \\ v(x, y, t = 0) = v_0(x, y) & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, y, t = 0) = v_1(x, y) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Premièrement, il faut définir les conditions initiales  $v_0$  et  $v_1$  comme fonctions de  $u_0$  et  $u_1$ . A priori, cette définition pose problème ; on ne peut pas se contenter d'écrire que

$$v_0 = B_{2N}^t(u_0) \quad \text{et} \quad v_1 = B_{2N}^t(u_1)$$

car une telle définition fait intervenir des dérivées temporelles de  $u_0$  ou  $u_1 \dots$  Toutefois, on peut facilement lever cette difficulté, les fonctions  $u_0$  ou  $u_1$  ayant été supposées à support strictement inclus dans  $\Omega$ . C'est trivial pour  $u_0$  :

$$(2.10) \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} = u_1 .$$

Pour  $u_1$ , Il suffit d'écrire que  $u_0$  vérifie l'équation des ondes :

$$(2.11) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \Delta u_0 .$$

En définitive, on peut définir  $v_0$  et  $v_1$  comme fonctions de  $u_0$  et  $u_1$  et de leurs dérivées spatiales uniquement ; le problème (2.9) est donc correctement défini. On sait qu'il admet une unique solution que nous noterons  $v$ .

### • Etape 2

On cherche à présent à déterminer  $u$ . Considérons pour cela dans le quart de plan  $\Omega$  le problème suivant :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} B_{2N}^t(u) = & v \\ u(x, y, t = 0) = & u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t = 0) = & u_1 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t = 0) = & \Delta u_0 \\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x, y, t = 0) = & \Delta u_1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^{2N-1} u}{\partial t^{2N-1}}(x, y, t = 0) = & \Delta^{N-1} u_1 \end{array} \right.$$

Tout comme à l'ordre 2, ce problème est bien posé, car on intègre dans le quart de plan  $\Omega = x < 0, y < 0$ .

On en conclut non seulement que  $u$  est ainsi bien définie, mais aussi que cette fonction  $u$  est  $C^\infty$ , d'où le titre de ce chapitre : on a obtenu une solution infiniment régulière.

### • Etape 3

Vérifions enfin que la fonction  $u$  telle qu'on l'a déterminée est bien solution du problème (2.8). Pour cela, on pose

$$w = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u .$$

Si on applique cet opérateur à la première équation de (2.12), il vient d'une part

$$(2.13) \quad B_{2N}^t(w) = 0 \quad \text{sur } \Omega ;$$

et d'autre part

$$(2.14) \quad 0 \leq i \leq 2N - 1, \quad \frac{\partial^i w}{\partial t^i}(x, y, t = 0) = 0 .$$

Ceci est clair par construction des conditions initiales du problème (2.8). Or, (2.13) et (2.14) impliquent que  $w = 0$  sur  $\Omega$ , c'est-à-dire que

$$(2.15) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{sur } \Omega .$$

La fonction  $u$  vérifie donc l'équation des ondes sur le domaine  $\Omega$ .

Il reste à montrer que les CLA sont elles aussi vérifiées. On étudie pour cela  $w_1 = B_N^{t,y}(u)$ . De la première équation de (2.12), on tire que

$$B_N^{t,x}(w_1) = v .$$

En particulier, la fonction  $g(x, t) = w_1(x, 0, t)$  satisfait (puisque  $w_1$  est régulière)

$$B_N^{t,x}(w_1)(x, 0, t) = v(x, 0, t) = 0 \quad \text{pour } x \in \Gamma_y, t > 0 .$$

Comme de plus, les données initiales ont été supposées à support strictement inclus dans  $\Omega$ , on a

$$g(x, 0) = \frac{\partial g}{\partial t}(x, 0) = 0 .$$

Donc  $g = 0$ , ce qui est notre conclusion. En inversant les rôles de  $x$  et de  $y$ , on obtient de la même façon l'autre CLA. La démonstration d'existence est terminée.



## Chapitre 3

# Une extension des méthodes énergétiques

On dispose à présent d'au moins une solution à notre problème 2.8, et cette solution est régulière. Ceci nous autorise à lui appliquer des opérateurs d'ordre élevé et va donc donner un sens aux énergies que nous allons définir dans ce chapitre. On aura alors étendu au problème du coin la méthode développée par Ha Dong et Joly dans [5], et généralisé les résultats de Sheen dans [12] : dans le premier cas, la décroissance en temps d'une énergie assure le caractère fortement bien posé du problème étudié, dans le second cas, c'est le premier pas vers une formulation variationnelle et la construction d'éléments finis.

### 3.1 Des résultats dans le cas $C_2 \times C_2$ : rappels

Ces résultats sont dûs à Dong Woo Sheen qui, sur les bases des travaux de Joly et Ha Duong dans [5], a cherché, pour des CLA d'ordre 2, une énergie associée au problème d'ordre 3 et non plus d'ordre 2, c'est-à-dire d'un ordre supérieur à celui des conditions de bords (voir [14], [12] et surtout [13]).

Le problème étudié est le même que dans [2], la condition de coin en moins :

Dans [5], tous les calculs sont fondés sur une même identité énergétique. Il suffit d'une intégration par parties et de la formule de Green pour vérifier facilement que toute solution de l'équation des ondes vérifie

$$(3.1) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \left\{ \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + |\nabla v|^2 \right\} \right] = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Nous appellerons par la suite

$$(3.2) \quad E(v) = \int_{\Omega} \left\{ \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + |\nabla v|^2 \right\}.$$

Dans un premier temps, les calculs de [13] se résument à écrire l'identité (3.1) pour  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ . On obtient ainsi les 4 équations suivantes :

$$\frac{d}{dt} \left( E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial n} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \int_{\Gamma_y} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \int_{\Gamma_x} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$$

$$\frac{d}{dt} \left( E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x \partial n} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} = \int_{\Gamma_y} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x \partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + \int_{\Gamma_x} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}$$

$$\frac{d}{dt} \left( E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \right) \right) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y \partial n} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} = \int_{\Gamma_y} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} + \int_{\Gamma_x} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x \partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y}$$

$$\frac{d}{dt} \left( E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial n} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x \partial y} = \int_{\Gamma_y} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x \partial y} + \int_{\Gamma_x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x \partial y}$$

Puis, on opère une simple addition :

$$(3.3) \quad \frac{d}{dt} \left( E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) + E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \right) + E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right) =$$

$$\int_{\Gamma_y} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2} \right) + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x \partial y} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right)$$

$$+ \int_{\Gamma_x} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right) + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x \partial y} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

L'idée de D.W. Sheen pour exploiter (3.3) est de dériver la CLA en temps et tangentiellement. On considère donc

$$\text{sur } \Gamma_y : \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{cases}$$

et

$$\text{sur } \Gamma_x : \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{cases}$$

Ceci permet de réécrire (3.3)

$$\frac{d}{dt} \left( E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) + E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \right) + E \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right) =$$

$$-2 \int_{\Gamma_y} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} \right|^2 - 2 \int_{\Gamma_x} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right|^2 - 4 \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x \partial y} \right|^2$$

et le tour est joué : on a explicité une forme quadratique définie positive dont la dérivée en temps est négative, autrement dit, une énergie qui décroît avec le temps.

On notera au passage l'importance de la régularité des solutions : elle est nécessaire pour que l'utilisation de l'identité énergétique (3.1) soit licite, mais aussi pour la dérivation des CLA, indispensable pour l'aboutissement des calculs.

### 3.2 Généralisation pour des CLA d'ordre N

Nous allons montrer qu'une énergie d'ordre  $2N + 1$  peut être associée au cas  $C_N \times C_N$ .

Précisons tout d'abord les hypothèses. Nous allons introduire des notations proches de celles utilisées dans [5] pour réécrire les opérateurs des CLA. On avait rappelé dans l'introduction la forme suivante, la plus générale qui soit :

$$B_N^{t,y} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right) \prod_{k=1}^N \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \prod_{j \neq k} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] \quad (3.4)$$

Puisqu'on s'intéresse à des solutions de l'équation des ondes, on peut aussi choisir cette seconde forme, équivalente pour de telles fonctions :

$$B_N^{t,y} \simeq \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right) \prod_{k=1}^N \left( (1 - \alpha_k) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \prod_{j \neq k} \left( (1 - \alpha_j) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \quad (3.5)$$

Enfin, pour alléger les notations, on écrira à présent sur  $\Gamma_y$  :

$$\frac{\partial Q^y u}{\partial y} + a \frac{\partial Q^y u}{\partial t} + \sum_k a_k \frac{\partial^3 Q_k^y u}{\partial t \partial y^2} = 0, \quad (3.6)$$

avec

$$(3.7) \quad P_k^y = (1 - \alpha_k) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial y^2} ,$$

$$(3.8) \quad Q^y = \prod_{k=1}^N P_k^y ,$$

$$(3.9) \quad Q_k^y = \prod_{j \neq k} P_j^y ,$$

et de même sur  $\Gamma_x$

$$(3.10) \quad \frac{\partial Q^x u}{\partial x} + a \frac{\partial Q^x u}{\partial t} + \sum_k a_k \frac{\partial^3 Q_k^x u}{\partial t \partial x^2} = 0 ,$$

avec

$$(3.11) \quad P_k^x = (1 - \alpha_k) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} ,$$

$$(3.12) \quad Q^x = \prod_{k=1}^N P_k^x ,$$

$$(3.13) \quad Q_k^x = \prod_{j \neq k} P_j^x ,$$

Dans l'expression de chacun de ces opérateurs, les constantes

$$(3.14) \quad a_k = \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} \quad \text{et} \quad a = \gamma - \sum_k \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} = \gamma - \sum_k a_k$$

sont des constantes positives dans le cas de conditions stables (cf. [5]).

Dans une phase préliminaire, nous allons mener quelques calculs sur  $\Gamma_y$ . La condition absorbante sur ce bord nous permet d'écrire que

$$(3.15) \quad \int_{\Gamma_y} \frac{\partial Q^y u}{\partial y} \cdot \left( -\frac{\partial Q^y u}{\partial y} \right) = \int_{\Gamma_y} \frac{\partial Q^y u}{\partial y} \left[ a \frac{\partial Q^y u}{\partial t} + \sum_k a_k \frac{\partial^3 Q_k^y u}{\partial t \partial y^2} \right] ,$$

donc

$$(3.16) \quad - \int_{\Gamma_y} \left| \frac{\partial Q^y u}{\partial y} \right|^2 = \int_{\Gamma_y} \left\{ a \frac{\partial Q^y u}{\partial y} \frac{\partial Q^y u}{\partial t} + \sum_k a_k \frac{\partial Q^y u}{\partial y} \frac{\partial^3 Q_k^y u}{\partial t \partial y^2} \right\}$$

Remarquons que, pour chaque  $k$ , on peut développer  $Q^y$ , puis chaque  $P_k$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^y u}{\partial y} \frac{\partial^3 Q_k^y u}{\partial t \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} (P_k(Q_k u)) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q_k^y u}{\partial y^2} \right) \\ &= \alpha_k \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q_k^y u}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 Q_k^y u}{\partial y^2} \right) + (1 - \alpha_k) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q_k^y u}{\partial t \partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 Q_k^y u}{\partial t \partial y} \right) \end{aligned}$$

A partir de (3.16), il vient en définitive :

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_y} \left| \frac{\partial Q^y u}{\partial y} \right|^2 &= \int_{\Gamma_y} \left\{ a \frac{\partial Q^y u}{\partial t} \frac{\partial Q^y u}{\partial y} + \sum_k a_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q_k^y u}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 Q_k^y u}{\partial y^2} \right) \right. \\ (3.17) \quad &\quad \left. + \sum_k \beta_k \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q_k^y u}{\partial t \partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 Q_k^y u}{\partial t \partial y} \right) \right\} . \end{aligned}$$

De même, en inversant les rôles de  $x$  et  $y$ , on a sur l'autre bord :

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_x} \left| \frac{\partial Q^x u}{\partial x} \right|^2 &= \int_{\Gamma_x} \left\{ a \frac{\partial Q^x u}{\partial t} \frac{\partial Q^x u}{\partial x} + \sum_k a_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q_k^x u}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 Q_k^x u}{\partial x^2} \right) \right. \\ (3.18) \quad &\quad \left. + \sum_k \beta_k \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q_k^x u}{\partial t \partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 Q_k^x u}{\partial t \partial x} \right) \right\} . \end{aligned}$$

Les deux équations (3.17) et (3.18), établies respectivement sur le bord horizontal et sur le bord vertical, constitue la réponse à notre problème. D'une part, le membre de gauche est dans chaque cas négatif. D'autre part, chaque terme du membre de droite est le produit de la dérivée en temps et de la dérivée normale sur le bord d'une même fonction (ce produit étant de surcroît affecté d'un coefficient positif si la condition de bord est stable). Enfin, et c'est la clé des calculs qui vont suivre, ces deux équations sont symétriques en  $x$  et en  $y$ . Pour toutes ces raisons, nous pouvons à présent exhiber une énergie décroissante en temps.

Pour cela, on considère l'opérateur suivant, d'ordre le double de celui des CLA :

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{t,y} \mathcal{Q}_{t,x}$$

avec

$$\mathcal{Q}_{t,y} = \left( aQ^y + \sum_k \beta_k \frac{\partial^2 Q_k^y}{\partial t \partial y} + \sum_k a_k \alpha_k \frac{\partial^2 Q_k^y}{\partial y^2} \right)$$

et

$$\mathcal{Q}_{t,x} = \left( aQ^x + \sum_k \beta_k \frac{\partial^2 Q_k^x}{\partial t \partial x} + \sum_k a_k \alpha_k \frac{\partial^2 Q_k^x}{\partial x^2} \right)$$

L'opérateur  $\mathcal{Q}$  est donc le produit d'un opérateur en  $t$  et  $y$  – que nous inspire (3.17) –, et d'un opérateur en  $t$  et  $x$  – que nous inspire (3.18). Tout va n'être à présent qu'un jeu de développements et de factorisations appropriés pour exploiter les équations (3.17) et (3.18). Commençons par développer l'opérateur  $\mathcal{Q}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} = & a^2 Q^x Q^y + \sum_k \beta_k^2 \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} + \sum_k a_k^2 \alpha_k^2 \frac{\partial^2 Q_k^x}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Q_k^y}{\partial y^2} \\ & + \sum_k a \beta_k Q^y \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} + \sum_k a a_k \alpha_k Q^y \frac{\partial^2 Q_k^x}{\partial x^2} + \sum_k a_k \alpha_k \beta_k \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \frac{\partial^2 Q_k^x}{\partial x^2} \\ & + \sum_k a \beta_k Q^x \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} + \sum_k a a_k \alpha_k Q^x \frac{\partial^2 Q_k^y}{\partial y^2} + \sum_k a_k \alpha_k \beta_k \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \frac{\partial^2 Q_k^y}{\partial y^2} \end{aligned}$$

L'idée de la démonstration consiste à appliquer l'identité énergétique (3.1) à chaque terme **privé de son coefficient**, puis de multiplier l'équation obtenue par ce coefficient. Par exemple, pour le premier terme du développement, on tire de (3.1) :

$$(3.19) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [E(Q^x Q^y)] = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} (Q^x Q^y u) \frac{\partial}{\partial n} (Q^x Q^y u)$$

On en déduit que

$$(3.20) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [a^2 E(Q^x Q^y)] = a^2 \int_{\Gamma_y} \frac{\partial Q^y}{\partial t} (Q^x u) \frac{\partial Q^y}{\partial y} (Q^x u) + a^2 \int_{\Gamma_x} \frac{\partial Q^x}{\partial t} (Q^y u) \frac{\partial Q^x}{\partial x} (Q^y u)$$

La manière de mener les calculs consiste aussi comme on peut le voir à isoler sur chaque bord la partie de l'opérateur en temps et en coordonnée tangentielle.

Après avoir traité tous les termes de cette façon, on somme les contributions et il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathcal{E}) = & \int_{\Gamma_y} \left\{ a^2 \frac{\partial Q^y}{\partial y}(Q^x u) \frac{\partial Q^y}{\partial t}(Q^x u) + \sum_k a \beta_k \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t \partial y^2}(Q^x u) \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t^2 \partial y}(Q^x u) \right. \\
& + \sum_k a a_k \alpha_k \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial y^3}(Q^x u) \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t \partial y^2}(Q^x u) \\
& + \sum_k a \beta_k \frac{\partial Q^y}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) \frac{\partial Q^y}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) + \sum_k \beta_k^2 \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t \partial y^2} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t^2 \partial y} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) \\
& + \sum_k a_k \alpha_k \beta_k \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial y^3} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t \partial y^2} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) \\
& + \sum_k a a_k \alpha_k \frac{\partial Q^y}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial x^2} \right) \frac{\partial Q^y}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial x^2} \right) + \sum_k a_k \alpha_k \beta_k \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t \partial y^2} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t^2 \partial y} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial x^2} \right) \\
& \left. + \sum_k a_k^2 \alpha_k^2 \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial y^3} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t \partial y^2} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial x^2} \right) \right\} \\
& + \int_{\Gamma_x} \left\{ a^2 \frac{\partial Q^x}{\partial x}(Q^y u) \frac{\partial Q^x}{\partial t}(Q^y u) + \sum_k a \beta_k \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t \partial x^2}(Q^y u) \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t^2 \partial x}(Q^y u) \right. \\
& + \sum_k a a_k \alpha_k \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial x^3}(Q^y u) \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t \partial x^2}(Q^y u) \\
& + \sum_k a \beta_k \frac{\partial Q^x}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) \frac{\partial Q^x}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) + \sum_k \beta_k^2 \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t \partial x^2} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t^2 \partial x} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) \\
& + \sum_k a_k \alpha_k \beta_k \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial x^3} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t \partial x^2} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) \\
& + \sum_k a a_k \alpha_k \frac{\partial Q^x}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial Q^x}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial y^2} \right) + \sum_k a_k \alpha_k \beta_k \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t \partial x^2} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t^2 \partial x} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial y^2} \right) \\
& \left. + \sum_k a_k^2 \alpha_k^2 \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial x^3} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t \partial x^2} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial y^2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

où nous avons noté  $\mathcal{E}$  l'énergie totale associée à notre problème :

$$\mathcal{E} = a^2 E(Q^x Q^y) + \sum_k \beta_k^2 E \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) + \sum_k a_k^2 \alpha_k^2 E \left( \frac{\partial^2 Q_k^x}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Q_k^y}{\partial y^2} \right)$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_k a \beta_k E \left( Q^y \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) + \sum_k a a_k \alpha_k E \left( Q^y \frac{\partial^2 Q_k^x}{\partial x^2} \right) + \sum_k a_k \alpha_k \beta_k E \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \frac{\partial^2 Q_k^x}{\partial x^2} \right) \\
& + \sum_k a \beta_k E \left( Q^x \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) + \sum_k a a_k \alpha_k E \left( Q^x \frac{\partial^2 Q_k^y}{\partial y^2} \right) + \sum_k a_k \alpha_k \beta_k E \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \frac{\partial^2 Q_k^y}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

Il faut rappeler que la dénomination “énergie” se justifie du fait de la positivité des coefficients: dans le cas de CLA stables comme on l’a déjà rappelé, les constantes  $a$ ,  $\beta_k$ ,  $\alpha_k$  et  $a_k$  sont toutes des constantes positives.

Il nous reste à achever une factorisation adéquate des termes de bord :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathcal{E}) = & \int_{\Gamma_y} \left\{ a \left[ a \frac{\partial Q^y}{\partial y}(Q^x u) \frac{\partial Q^y}{\partial t}(Q^x u) + \sum_k \beta_k \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t \partial y^2}(Q^x u) \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t^2 \partial y}(Q^x u) \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_k a_k \alpha_k \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial y^3}(Q^x u) \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t \partial y^2}(Q^x u) \right] \right. \\
& + \sum_k \beta_k \left[ a \frac{\partial Q^y}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) \frac{\partial Q^y}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) + \sum_k \beta_k \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t \partial y^2} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t^2 \partial y} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) \right. \\
& \left. \left. + \sum_k a_k \alpha_k \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial y^3} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t \partial y^2} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) \right] \right. \\
& + \sum_k a_k \alpha_k \left[ a \frac{\partial Q^y}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial x^2} \right) \frac{\partial Q^y}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial x^2} \right) + \sum_k a_k \alpha_k \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t \partial y^2} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t^2 \partial y} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial x^2} \right) \right. \\
& \left. \left. + \sum_k \alpha_k \beta_k \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial y^3} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^3 Q_k^y}{\partial t \partial y^2} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial x^2} \right) \right] \right\} \\
& + \int_{\Gamma_x} \left\{ a \left[ a \frac{\partial Q^x}{\partial x}(Q^y u) \frac{\partial Q^x}{\partial t}(Q^y u) + \sum_k \beta_k \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t \partial x^2}(Q^y u) \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t^2 \partial x}(Q^y u) \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_k a_k \alpha_k \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial x^3}(Q^y u) \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t \partial x^2}(Q^y u) \right] \right. \\
& + \sum_k \beta_k \left[ a \frac{\partial Q^x}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) \frac{\partial Q^x}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) + \sum_k \beta_k \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t \partial x^2} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t^2 \partial x} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) \right. \\
& \left. \left. + \sum_k a_k \alpha_k \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial x^3} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t \partial x^2} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_k a_k \alpha_k \left[ a \frac{\partial Q^x}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial Q^x}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial y^2} \right) + \sum_k a_k \alpha_k \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t \partial x^2} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t^2 \partial x} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial y^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_k \alpha_k \beta_k \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial x^3} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^3 Q_k^x}{\partial t \partial x^2} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial y^2} \right) \right] \Big\}
\end{aligned}$$

A n'en pas douter, la difficulté majeure de ce calcul réside dans la place qu'il occupe sur la feuille ! Il ne nous reste pourtant plus qu'à utiliser (3.17) et (3.18) pour démontrer que :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathcal{E}) = & - \int_{\Gamma_y} \left| \frac{\partial Q^y}{\partial y} (Q^x u) \right|^2 - \int_{\Gamma_y} \left| \frac{\partial Q^y}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial t \partial x} \right) \right|^2 - \int_{\Gamma_y} \left| \frac{\partial Q^y}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 Q^x}{\partial x^2} \right) \right|^2 \\
& - \int_{\Gamma_x} \left| \frac{\partial Q^x}{\partial x} (Q^y u) \right|^2 - \int_{\Gamma_x} \left| \frac{\partial Q^x}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial t \partial y} \right) \right|^2 - \int_{\Gamma_x} \left| \frac{\partial Q^x}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 Q^y}{\partial y^2} \right) \right|^2.
\end{aligned}$$

Pour parvenir à ce résultat, nous supposons bien sûr que les fonctions  $Q^x u$ ,  $\frac{\partial^2 Q^x u}{\partial t \partial x}$  et  $\frac{\partial^2 Q^x u}{\partial x^2}$  vérifient la condition absorbante sur le bord  $\Gamma_y$ , ce qui est bien licite car les trois opérateurs qui les définissent mettent en jeu uniquement des dérivées temporelles et tangentielles. Il en va de même pour les fonctions  $Q^y u$ ,  $\frac{\partial^2 Q^y u}{\partial t \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 Q^y u}{\partial y^2}$  sur le bord  $\Gamma_x$ .

En conséquence, nous avons montré que l'énergie  $E$ , d'ordre le double de celui des conditions de bord, est décroissante. CQFD.

### 3.3 Applications

Outre certains résultats annexes – comme des démonstrations de stabilité en fréquence qui en découlent partiellement (cf. [9]) –, l'intérêt d'avoir exhibé une énergie d'ordre élevé est double :

1. L'unicité des solutions régulières.

C'est la première conséquence de nos résultats "énergétiques" et c'est celle qui nous intéresse dans ce rapport. C'est une évidence mais qui est d'importance ; elle nous permet d'énoncer le théorème suivant :

*il existe une **unique solution régulière** au problème du coin 2.8*

Et dans le chapitre qui va suivre, nous allons déterminer des conditions de coins déduites par compatibilité, conditions que vérifie cette unique solution régulière.

2. La construction d'éléments finis.

C'était la principale motivation de D.W. Sheen que de mettre au point une famille d'éléments finis appropriés au problème du coin dans le cas  $C_2 \times C_2$ . Il semble acquis que des résultats équivalents puissent découler de notre énergie d'ordre  $2N + 1$ . Une formulation variationnelle reste à écrire et son implémentation à effectuer.

## Chapitre 4

# Des conditions de coins par compatibilité

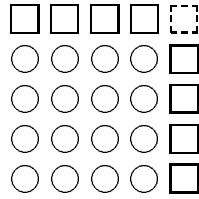
Arrivé à ce stade du rapport, on peut faire un nouveau bilan.

D'une part, au cours de la première partie de l'étude du problème élémentaire (2.8), c'est-à-dire

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^N = 0 & \text{sur } (\Gamma_y) \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^N = 0 & \text{sur } (\Gamma_x) \\ u(x, y, t = 0) = u_0(x, y) & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t = 0) = u_1(x, y) & \text{sur } \Omega \end{array} \right.$$

on a montré l'existence d'une unique solution régulière, pour des données initiales dans  $D(\Omega)$ . D'autre part, la lecture de [2] nous assure que ce problème admet d'autres solutions, moins régulières. Or, ces autres solutions sont indésirables car liées à l'apparition d'une onde de coin ([2]), comme nous le rappelons plus bas. La question qui se pose, d'un point de vue mathématique, est donc de savoir comment préciser la définition de notre problème, quelles équations supplémentaires lui adjoindre par exemple, pour "écarter" ces autres solutions.

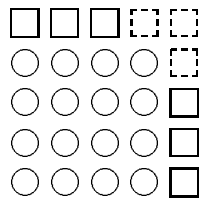
On peut aussi adopter une approche numérique du problème lié à la présence d'un coin. En effet, après discrétisation sur une grille régulière, le fait que l'opérateur des CLA ait un terme de dérivée tangentielle supérieur à 2 pose un problème de calcul au nœud du coin. En effet, si on considère les nœuds ci-dessous, on voit que, pour les nœuds représentés par des cercles, le laplacien



de l'équation des ondes peut être calculé du fait de la présence d'un nœud au dessus, au dessous, à droite et à gauche; la dérivée seconde tangentielle pour les nœuds représentés par des carrés du fait de la présence d'un nœud de part et d'autre. Par contre, on ne peut appliquer aucune des 2 CLA au

coin. Il manque une équation vérifiée en ce coin qui permettrait le calcul du nœud pointillé: une condition de coin.

Cette remarque "numérique" n'est pas gratuite; elle donne aussi une idée du nombre de conditions de coins dont aurait besoin au moment d'une implé-



mentation. Pour une CLA dont l'opérateur contient une dérivée tangentielle d'ordre 4 (comme celles de Padé à l'ordre 4 et à l'ordre 5 par exemple) on peut voir sur le schéma de gauche que trois nœuds ne pourront être calculés directement, et on aura donc besoin de trois conditions de coins.

On peut dire la même chose en considérant l'ordre des dérivées tangentielles dans les CLA: pour l'ordre 2, on a un terme en  $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ , ce qui "nécessite" au raccordement que constitue le coin, 2 conditions limites: ce sera  $u = u$  au coin, et la condition de coin; à l'ordre 3, c'est la même chose; à l'ordre 4, on a un terme en  $\frac{\partial^4 u}{\partial s^4}$ , il faut 3 conditions de coin; etc.

Le plan que nous allons suivre à présent est le suivant. Dans un premier temps, nous indiquons les principaux résultats de [2] car ils nous servent par

la suite d'heuristiques. Ensuite, nous montrons comment déterminer les conditions de coin que nous pensons être les plus intéressantes, les conditions de coin déduites par compatibilité ou CCC, pourquoi elles existent et combien il y en a. Une fois qu'elles sont obtenues se pose la question de leur "meilleure" expression, par exemple en vue du calcul des nœuds de coin sur une grille de calcul ; peut-on simplifier les CCC à l'aide de l'équation des ondes par exemple ? Enfin, il restera un ultime problème mathématique : a-t-on unicité de la solution après l'adjonction des CCC ?

## 4.1 Le cas $C_2 \times C_2$

On va rappeler rapidement l'essentiel de l'analyse menée dans [2] concernant cette question. Soit le problème (4.2) :

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \quad (1) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \Gamma_y \quad (2) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{sur } \Gamma_x \quad (3) \\ u(x, y, t = 0) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t = 0) = u_1 & \text{sur } \Omega \end{array} \right.$$

Ce problème n'est pas bien posé car il existe plusieurs solutions. De plus, sa discrétisation présente des difficultés dans les coins du domaine. Pour remédier à ces deux inconvénients, Bamberger, Joly et Roberts ont cherché, par des combinaisons linéaires des équations du problème de départ, une nouvelle équation où seraient éliminées les dérivées spatiales d'ordre 2. Ils sont parvenus à exhiber une "condition de coin", qu'on dira, vue sa construction, "déduite par compatibilité". Nous noterons ce type de conditions CCC.

Pour le problème (4.2), il leur a suffi d'écrire  $(2) + (3) - \frac{1}{2}(1)$  pour obtenir

$$(4.3) \quad \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{en } x = 0, y = 0.$$

Cette relation, qui n'est valable qu'au coin, peut s'intégrer en temps pour donner la CCC associée au cas  $C_2 \times C_2$  :

$$(4.4) \quad \frac{3}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{en } x = 0, y = 0 .$$

On notera que cette CCC est d'ordre 1, c'est-à-dire 1 de moins que les CLA. En l'ajoutant aux autres équations du problème, ils ont établi ceci :

- il existe encore une solution au problème,
- elle est cette fois unique,
- elle est régulière,
- ceci reste vrai pour l'adjonction de tout autre condition de coin, du type

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{en } x = 0, y = 0$$

pourvu que  $\gamma > 0$ .

Mais ils montrent aussi que pour toute condition avec  $\gamma \neq \frac{3}{2}$ , la régularité de la solution diminue (singularité au coin de certaines dérivées), et les réflexions numériques augmentent en conséquence (apparition d'une "onde de coin").

## 4.2 Détermination des CCC

Les enseignements que nous retiendrons des travaux présentés ci-dessus sont simples : la CCC est la meilleure condition de coin possible, tant du point de vue théorique (régularité de la solution) que du point de vue numérique (moindres réflexions). Ceci pourrait sans doute se montrer en toute rigueur, comme on a généralisé la preuve de l'existence de solution régulière, mais nous ne le ferons pas ; le cœur du problème en effet réside dans la difficulté d'explicitier la – ou plutôt les – CCC.

### 4.2.1 Un problème algébrique non trivial

La question s'énonce de manière très simple : peut-on à partir des équations du problème, en les dérivant, en les combinant, faire apparaître des relations portant sur des dérivées d'ordre moins élevé, évaluées au coin du domaine ? Si oui, combien ?

Cette interrogation est présentée dans [2] comme un “problème algébrique non trivial dont l'étude ne serait pas sans intérêt”, Notre réponse est la suivante :

*Pour un problème au coin du type  $C_{2N} \times C_{2N}$  ou  $C_{2N+1} \times C_{2N+1}$ , il existe exactement  $2N - 1$  CCC, et l'algorithme indiqué ci-dessous, ainsi que le programme MAPLE donné en annexe, permet de les expliciter toutes.*

Nous pensons de plus que notre algorithme s'adapte sans difficulté au cas de la dimension 3, ou  $n$ , pour expliciter des conditions d'arête ou de sommet...

Outre le fait qu'une explicitation est rendue possible au cas par cas, nous affirmons donc l'existence théorique de conditions de coin, et nous connaissons avec certitude leur nombre exact. Le point faible de nos travaux est que nous ne fournissons “que” l'algorithme, et non – pour l'instant – de formules qui soient fonctions des coefficients des conditions de bord, du type de celles qu'on peut trouver dans [3] pour un problème il est vrai différent.

La complexité du travail à mener résulte de la très grande liberté dont on dispose a priori. En effet, plusieurs types d'opérations sont à envisager. On s'autorise premièrement à dériver l'équation des ondes “un certain nombre de fois” et aussi bien en temps qu'en espace. Pour les conditions de bords d'autre part, en plus des dérivations en temps, celles par rapport à la variable tangentielle sont également permises. L'idée qui justifie ces opérations est que la solution que nous cherchons à caractériser est très régulière, et donc susceptible d'être dérivée à loisir. Enfin, parmi le grand nombre – infini ! – d'équations que l'on peut ainsi obtenir, on cherche alors à effectuer une “bonne” combinaison linéaire, dont le résultat pourra s'intégrer suffisamment de fois en temps pour devenir une CCC, c'est-à-dire rappelons-le, une équation d'ordre plus faible que celui des CLA et que la solution vérifie uniquement au coin du domaine.



### 4.2.2 Un exemple simple

Pour comprendre facilement la démarche que nous allons suivre dans le cas général, nous allons ré-établir un résultat connu mais qui a l'avantage de s'obtenir facilement. Comme le cas  $C_2 \times C_2$  est vraiment trop simple – on a vu qu'une simple combinaison linéaire suffit pour conclure –, on va reprendre le cas  $C_3 \times C_3$ . L'idée qui doit nous guider dans un premier temps, c'est de considérer comme certaine la conjecture ci-dessus, à savoir qu'il doit y avoir  $(2N-1)$  CCC pour des CLA d'ordre  $2N$  et  $2N+1$ .

Pour une meilleure lisibilité, on adopte dorénavant des notations polynomiales ; par exemple, on écrira l'équation des ondes

$$(4.5) \quad t^2 - x^2 - y^2 = 0 ,$$

la condition sur le bord de normale sortante suivant  $\vec{j}$ ,

$$(4.6) \quad t^3 + t^2 y - \frac{3}{4} t x^2 - \frac{1}{4} x^2 y = 0 ,$$

et la condition sur le bord de normale sortante suivant  $\vec{i}$ ,

$$(4.7) \quad t^3 + t^2 x - \frac{3}{4} t y^2 - \frac{1}{4} x y^2 = 0 .$$

(Attention : ces notations ne sont ici qu'une facilité d'écriture ; les démonstrations seraient inchangées bien que très lourdes si l'on conservait des notations de type opérateur différentiel.)

Les opérations permises sont :

- pour (4.5), la multiplication par  $t, x$  et  $y$  qui correspondent respectivement à la dérivation en temps et suivant chaque variable d'espace ;
- pour (4.6), la multiplication par  $t$  et  $x$ , et pour (4.7), la multiplication par  $t$  et  $y$ , qui correspondent respectivement à la dérivation en temps et tangentielllement.

Supposons que pour trouver la relation cherchée – qu'on connaît déjà ! –, il faille “faire les calculs à l'ordre 4”, c'est-à-dire dériver nos équations jusqu'à obtenir des opérateurs d'ordre 4, puis intégrer 2 fois en temps (on justifiera ces

hypothèses plus tard). On est alors amené à élever (4.5),(4.6) et (4.7) à l'ordre 4 et à manipuler 10 équations : 6 proviennent de (4.5),

$$(4.8) \quad \begin{cases} t^4 - t^2x^2 - t^2y^2 = 0 \\ t^3x - tx^3 - txy^2 = 0 \\ t^3y - tx^2y - ty^3 = 0 \\ t^2xy - x^3y - xy^3 = 0 \\ t^2x^2 - x^4 - x^2y^2 = 0 \\ t^2y^2 - x^2y^2 - y^4 = 0 \end{cases}$$

2 de (4.6),

$$(4.9) \quad \begin{cases} t^4 + t^3y - \frac{3}{4}t^2x^2 - \frac{1}{4}tx^2y = 0 \\ t^3x + t^2xy - \frac{3}{4}tx^3 - \frac{1}{4}x^3y = 0 \end{cases}$$

et 2 de (4.7)

$$(4.10) \quad \begin{cases} t^4 + t^3x - \frac{3}{4}ty^2 - \frac{1}{4}txy^2 = 0 \\ t^3y + t^2yx - \frac{3}{4}ty^3 - \frac{1}{4}xy^3 = 0 \end{cases}$$

Il devient difficile à un esprit humain d'appréhender un tel système ! Toujours pour se faciliter la tâche, on a recours à l'algèbre linéaire ; on range ces 10 relations dans une matrice  $10 \times 15$  : 1 ligne par relation, 1 colonne par "variable" (on entend par variable un élément de la base canonique des polynômes de 3 variables de degré plus petit que 4 :  $t^4$ ,  $t^2xy$ , etc.). Comme on voudra plus tard intégrer deux fois en temps, c'est-à-dire diviser par  $t^2$ , isolons les variables qui contiennent ce facteur  $t^2$  – il y en a 6 – dans les dernières colonnes de la matrice. L'ordre retenu est le suivant, on verra par la suite qu'il est déterminant :  $x^2y^2$ ,  $x^3y$ ,  $xy^3$ ,  $x^4$ ,  $y^4$ ,  $tx^2y$ ,  $txy^2$ ,  $tx^3$ ,  $ty^3$ ,  $t^2xy$ ,  $t^2x^2$ ,  $t^2y^2$ ,  $t^3x$ ,  $t^3y$ ,  $t^4$ .

On obtient ainsi la matrice M :

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Distinguons dans cette matrice une partie droite et une partie gauche. On note  $M_2$  la matrice rectangulaire formée par les 6 dernières colonnes, et  $M_1$  la matrice  $10 \times 9$  formée par les 9 premières ; c'est celle-ci qui va nous intéresser, et plus précisément son noyau. S'il existe en effet un vecteur  $X$  tel que de son noyau :

$$M_1 X = 0 ,$$

on peut alors effectuer le calcul suivant :

$$X^t M = X^t (M_1 M_2) = [0 \mid X^t M_2]$$

Il faut voir la multiplication à gauche par  $X^t$ , vecteur propre transposé associé à la valeur propre 0, comme l'écriture formalisée d'une combinaison linéaire particulière des lignes de M, donc des équations du système. Or, la ligne qu'on a ainsi obtenue a pour caractéristique de ne s'exprimer qu'en fonction des six dernières variables, autrement dit, elle correspond à une équation qui peut s'intégrer deux fois en temps : c'est une bonne prétendante au "titre" de condition de coin déduite par compatibilité.

Avant de voir ce qu'il en est, quelques précisions s'imposent. D'abord, nous n'avons fait pour l'instant que des calculs formels ; à aucun moment, nous n'affirmons par exemple que le noyau  $M_1$  n'est pas de dimension nulle. Plus grave, il faut avouer que cette question n'est pas très pertinente car la première ligne de  $M_1$  est pleine de 0 !! Or, on veut bien entendu une combinaison linéaire **non triviale** des équations du système... Cette mauvaise plaisanterie a une explication fort simple : on a multiplié une équation par  $t^2$ , logique qu'on puisse ensuite la diviser par  $t^2$ . Ceci va nous inspirer la règle suivante : on n'écrit pas, à l'ordre de dérivation choisi (ici 4), toutes les équations dérivées possibles, **mais seulement** celles obtenues après multiplication par un facteur qui ne contiendra pas  $t^n$ , où  $n$  est le nombre de fois que l'on veut intégrer en temps (ici  $t^2$ ). Il n'y a donc en fait dans notre exemple que neuf équations à considérer.  $M_1$  devient une matrice  $9 \times 9$ , matrice carrée donc - et on va pouvoir parler de matrice inversible ou non. On verra le rôle que peut jouer la dixième équation plus tard.

Le calcul est effectué à l'aide de MAPLE. Ce langage de calcul formel présente pour nous des qualités de souplesse et d'exactitude : tous les calculs sont menés facilement et sur des entiers. La recherche de vecteurs propres aboutit à :

$$X^t = [0, 1, 0, 3, 3, -12, -4, -12, -4]$$

et on en déduit :

$$X^t M = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7, -9, -9, 13, 13, 24] .$$

ce qui correspond, en reprenant nos notations polynomiales, à

$$7xy - 9(x^2 + y^2) + 13(tx + ty) + 24t^2 = 0 .$$

C'est seulement maintenant qu'on se sert de la dixième équation, qui n'est autre que l'équation des ondes elle-même, qu'on s'est abstenu de multiplier puis de diviser par  $t^2$ . (Ces précisions ne sont pas gratuites : détermination et simplification des CCC sont deux problèmes distincts, tous les deux délicats comme on pourra s'en rendre compte plus tard...)

Grâce à l'équation des ondes ( $x^2 + y^2 = t^2$ ) on obtient finalement :

$$15t^2 + 13(tx + ty) + 7xy = 0$$

Soit, en repassant aux opérateurs :

$$15 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 13 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \right) + 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

On a bien retrouvé la CCC établie dans [2].

### 4.2.3 Le cas général

Dans un premier temps, nous donnons l'algorithme qui nous permet de trouver les CCC pour un  $N$  fixé quelconque. C'est en quelque sorte un théorème que nous allons prouver ensuite. On pourra s'apercevoir que cet algorithme est très simple, très facile à programmer, surtout avec MAPLE. Rappelons à ce propos qu'un programme complet et commenté est fourni en annexe C alors qu'un inventaire de quelques CCC, déterminé par ce programme, est donné en annexe B.

Pour un maximum de clarté, nous travaillons avec nos notations polynomiales, et nous avons choisi deux conventions d'écriture dans la présentation de cet algorithme. Premièrement, chaque fois que ce sera possible, nous indiquons *en italique* la valeur des variables correspondant au cas  $C_3 \times C_3$ , cas développé au paragraphe précédent. Deuxièmement, les points qui devront être démontrés seront notés **en gras**. A la fin de ce paragraphe, on donnera les justifications nécessaires.

Avec ces conventions, voici l'algorithme proprement dit.

#### Algorithme de détermination des CCC

1. Saisie des constantes :

- $N$  : ordre des CLA ( $N = 3$ )
- $E0$  : l'équation des ondes :  $t^2 - x^2 - y^2 = 0$
- $E1$  et  $E2$  : les CLA  
 $(N = 3 : t^3 + t^2 y - \frac{3}{4} t x^2 - \frac{1}{4} x^2 y = 0 \text{ et } t^3 + t^2 x - \frac{3}{4} t y^2 - \frac{1}{4} x y^2 = 0)$

2. On calcule  $Cal$  : ordre où se font les calculs  $(N = 3 : Cal = 4)$

$$\begin{aligned} \text{si } N = 2m & : Cal = 3(2m - 1) - 1 \\ \text{si } N = 2m + 1 & : Cal = 3(2m - 1) + 1 \end{aligned}$$

3. Création de listes des multiplicateurs (on dérive les équations)

- Mult0 pour E0 : aucun élément de la liste Mult0 ne peut contenir une puissance de  $t$  supérieure à  $Cal - N$   
 $(N = 3 : tx, ty, x^2, xy, y^2)$
- Mult1 pour E1  $(N = 3 : t, y)$
- Mult2 pour E2  $(N = 3 : t, x)$

4. multiplication et stockage dans E, système de polynomes

$(N = 3 : \text{voir les systèmes 4.8, 4.9 et 4.10}).$

5. Création de la matrice M à partir de E.

6. Extraction de la sous-matrice  $M_1$ .

7. Calcul de la dimension de son noyau : **c'est le nombre de CCC.**

$$2m - 1 \quad \text{si } N = 2m \text{ ou si } N = 2m + 1$$

$(N = 3 : 1)$

8. Calcul des vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

$$(N = 3 : [0, 1, 0, 3, 3, -12, -4, -12, -4] )$$

9. Calculs de  $X^t M_2 \rightarrow$  on a les CCC.  $(N = 3 : [7, -9, -9, 13, 13, 24] )$

10. (facultatif) Simplification des CCC.

Les points à justifier ne sont qu'au nombre de deux. Tout tient en fait en une question : pourquoi la dimension du noyau de  $M_1$  a-t-elle le bon goût de valoir  $(2m - 1)$ , résultat souhaité, quand on choisit  $Cal$ , l'ordre des calculs, comme on l'a fait ? On est aussi en droit de se demander si les CCC peuvent être obtenues plus facilement, c'est-à-dire en dérivant moins ; ou bien au contraire, penser qu'on fera apparaître d'autres conditions en poursuivant les dérivations.

Nous allons à présent répondre à ces questions et démontrer le résultat annoncé. Précisons que cette démonstration est le fruit d'une démarche au départ complètement empirique : on voulait seulement avoir un outil pour exhiber des CCC pour  $N$  fixé, mais à force de constater que nos conjectures étaient systématiquement vérifiées, l'idée d'un théorème s'est imposée. Et étant donné le caractère automatique des dérivations, le côté systématique et répétitif des opérations, la notion de récurrence est devenue évidente. On a alors accordé beaucoup de soin à l'ordre dans lequel on rangeait variables et polynômes de nos calculs ; nous avons été amenés à les réordonner c'est-à-dire à opérer des permutations adéquates de lignes et de colonnes de  $M$ . Ceci a permis de mettre en évidence une structure très particulière de cette matrice, qui rendaient les conclusions à tirer triviales.

Reprenons le cas de l'exemple simple  $C_3 \times C_3$ . On a déjà précisé l'ordre des variables, on ne permute donc plus les colonnes de la matrice. Les 9 équations du système en revanche sont dans un ordre quelconque. Essayons de respecter une certaine "homogénéité" en temps : on regroupe celles qui se factorisent par un même facteur en temps, une même puissance de  $t$  ; ici, on a simplement  $1 = t^0$  en facteur

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} t^2xy - x^3y - xy^3 = 0 \\ t^2x^2 - x^4 - x^2y^2 = 0 \\ t^2y^2 - x^2y^2 - y^4 = 0 \\ t^3x + t^2xy - \frac{3}{4}tx^3 - \frac{1}{4}x^3y = 0 \\ t^3y + t^2yx - \frac{3}{4}ty^3 - \frac{1}{4}xy^3 = 0 \end{array} \right.$$

ou  $t$

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} t^3 x - tx^3 - txy^2 = 0 \\ t^3 y - tx^2 y - ty^3 = 0 \\ t^4 + t^3 y - \frac{3}{4}t^2 x^2 - \frac{1}{4}tx^2 y = 0 \\ t^4 + t^3 x - \frac{3}{4}ty^2 - \frac{1}{4}txy^2 = 0 \end{array} \right.$$

d'où une permutation des lignes de M, qui s'écrit à présent :

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$



et la matrice  $M_1$  :

$$\left[ \begin{array}{ccccc|cccc} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dans cette matrice on voit très nettement apparaître une structure bloc, mais il y en a aussi deux propriétés intéressantes :

1. Le bloc inférieur gauche est nul ; ce n'est que la conséquence de notre rangement soigneux des équations du système.
2. Les blocs  $M_{11}$  – supérieur gauche – et  $M_{12}$  – inférieur droit – sont carrés, de tailles respectives  $5 \times 5$  et  $4 \times 4$  et surtout de forme similaire. Cette similitude, qui est la clé de notre démonstration, reflète le caractère systématique de nos calculs : les coefficients  $-1$  proviennent de l'équation des ondes, les coefficients  $-\frac{1}{4}$  ( $a$  et  $b$  plus généralement) proviennent de chaque CLA.

En conséquence, on peut écrire

$$\det(M_1) = \det(M_{11})\det(M_{12})$$

et même, en notant  $P_A(x)$  le polynôme caractéristique d'une matrice  $A$ ,

$$P_{M_1}(x) = P_{M_{11}}(x)P_{M_{12}}(x) .$$

Pour montrer que 0 est valeur propre de  $M_1$  une et une seule fois, il suffit à présent de calculer

$$P_{M_{11}}(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{9}{16}x$$

et

$$P_{M_{12}}(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{16}$$

Ce qu'il reste à voir plus qu'à véritablement comprendre, c'est que tout se passe de la même façon pour les ordres supérieurs. Grâce à l'ordonnement des équations et des variables que nous avons retenu, la matrice  $M_1$  va conserver une structure bloc, elle sera même toujours triangulaire supérieure par blocs et les blocs diagonaux seront carrés, de taille décroissante le long de la diagonale et tous de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & & & & . \\ -1 & 0 & 0 & . & -1 & 0 & & & . \\ 0 & -1 & & . & & . & & & . \\ . & 0 & . & & . & & & & . \\ . & & & & & . & . & -1 & 0 \\ . & & & 0 & -1 & & . & . & -1 \\ . & & & & 0 & a & . & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & b & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C'est ce qu'on peut voir par exemple dans le cas  $C_4 \times C_4$ . On sait que pour  $N = 4 = 2 * 2$ , on doit trouver  $2 * 2 - 1 = 3$  CCC. Le "masque" de la matrice est donné ci-dessous. Les calculs ont été faits à l'ordre de dérivation  $Cal = 3 * (2 * 2 - 1) - 1 = 8$  et pour deux CLA quelconques dont le coefficient du seul terme de degré 0 en  $t$  serait  $a$  pour l'une et  $b$  pour l'autre. On retrouve une matrice triangulaire supérieure par blocs.

|                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $ \begin{array}{ccccccc} 0 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & & 0 & -1 & & & \\ & -1 & & 0 & -1 & & \\ & & -1 & & 0 & -1 & \\ & & & -1 & & 0 & -1 \\ & & & & a & 0 & \\ & & & & & b & 0 \end{array} $ |                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                       |
|                                                                                                                                                                                                                     | $ \begin{array}{ccccccc} 0 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & & 0 & -1 & & & \\ & -1 & & 0 & -1 & & \\ & & -1 & & 0 & -1 & \\ & & & -1 & & 0 & -1 \\ & & & & a & 0 & \\ & & & & & b & 0 \end{array} $ |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                       |
|                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                     | $ \begin{array}{ccccccc} 0 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & & 0 & -1 & & & \\ & -1 & & 0 & -1 & & \\ & & -1 & & 0 & -1 & \\ & & & a & 0 & & \\ & & & & b & 0 & \end{array} $ |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                       |
|                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                              | $ \begin{array}{ccccccc} 0 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & & 0 & -1 & & & \\ & -1 & & 0 & -1 & & \\ & & -1 & & 0 & -1 & \\ & & & a & 0 & & \\ & & & & b & 0 & \end{array} $ |                                                                                                                                                                       |
|                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                              | $ \begin{array}{ccccccc} 0 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & & 0 & -1 & & & \\ & -1 & & 0 & -1 & & \\ & & a & 0 & & & \\ & & & b & 0 & & \end{array} $ |
|                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                              | $ \begin{array}{ccccccc} 0 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & & 0 & -1 & & & \\ & a & 0 & & & & \\ & & b & 0 & & & \end{array} $                        |
|                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                              | $ \begin{array}{ccccccc} 0 & -1 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & & 0 & -1 & & & \\ & a & 0 & & & & \\ & & b & 0 & & & \end{array} $                        |

On peut remarquer que la taille de la matrice est devenue conséquente : ce n'est pas moins de 35 équations a priori qu'il aurait fallu combiner astucieusement pour espérer faire apparaître "à la main" les 3 CCC!! Et ici,  $N$  ne vaut que 4... (pour  $N = 5$ ,  $M$  est une matrice  $51 \times 66$ )

Les blocs situés en dessous de la "diagonale" sont comme on l'a déjà dit tous nuls. Les blocs situés au-dessus de la "diagonale" sont très creux, mais

cela n'a aucun intérêt particulier, si ce n'est pour la rapidité des calculs. Tous ces blocs sont rectangles. Seuls les blocs diagonaux sont carrés et ils ont tous la forme annoncée.

Or, on va montrer au prochain paragraphe, sous forme d'un lemme, que le polynôme caractéristique de la matrice  $n \times n$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & & & & . \\ -1 & 0 & 0 & . & -1 & 0 & & & . \\ 0 & -1 & & . & & . & & & . \\ . & 0 & . & & . & & & & . \\ . & & & & . & . & -1 & 0 & \\ . & & & 0 & -1 & . & . & -1 & \\ . & & & & 0 & a & . & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & b & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se calcule par récurrence, admet 0 comme racine simple si  $n$  est impair, n'admet pas 0 comme racine si  $n$  est pair.

Une fois que ce résultat sera établi, on voit que une première partie du résultat sera atteinte: si il y a 3 blocs diagonaux aux dimensions impaires comme c'est le cas ci-dessus (mais plus généralement  $2m-1\dots$ ), le noyau de  $M_1$  est de dimension 3 (resp.  $2m-1$ ) et on trouve 3 CCC (resp.  $2m-1$ ). Il faut – et il suffit – donc de dériver suffisamment pour avoir le bon nombre de tels blocs; d'où la “formule barbare” donnée ci-dessus pour calculer  $Cal\dots$

Il est possible d'être encore plus précis. La première CCC est obtenue sans qu'il soit nécessaire de dériver si  $N$  est pair, en ne dérivant qu'une seule fois si  $N$  est impair. Puis à chaque fois que l'ordre des dérivations augmente de 2, on fait apparaître une nouvelle CCC.

Une dernière question se pose alors: si l'on “pousse” l'ordre de dérivation pour les calculs au-delà de  $Cal$ , va-t-on obtenir des CCC supplémentaires?

La réponse est certainement non bien que nous ne soyons pas parvenu à le démontrer clairement. Expérimentalement, on s'aperçoit que la dimension du noyau de la matrice  $M_1$  augmente effectivement avec l'ordre des dérivations, mais la multiplication d'un vecteur de ce noyau par  $M_2$  ne donne pas une nouvelle CCC, mais seulement  $0 = 0 \dots$ . Nous reviendrons sur ce point au cours du paragraphe sur la simplification des CCC.

#### 4.2.4 Le lemme

Il s'agit d'un simple calcul par récurrence et de quelques développements de déterminants. Si on appelle  $B_n$  la matrice  $n \times n$  ci-dessus, on peut montrer que :

$$P_{B_n}(x) = x^2 P_{B_{n-2}}(x) - (a+b)x P_{B_{n-3}}(x) + ab P_{B_{n-4}}(x) .$$

Ce résultat n'est toutefois pas nécessaire pour notre propos. Pour éviter d'alourdir encore ce chapitre déjà long, nous allons nous contenter d'un peu moins.

Soit le déterminant suivant :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & x & 0 & -1 & 0 & & \\ -1 & 0 & x & . & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & & . & & . & \\ . & 0 & . & & . & & -1 \\ . & & & & & . & 0 \\ . & & & 0 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} .$$

Un calcul élémentaire permet d'établir la relation de récurrence suivante :

$$\Delta_n(x) = x \Delta_{n-1}(x) - ab \Delta_{n-2}(x) .$$

Comme  $\Delta_3(x) = x^3 - 2x$  et  $\Delta_4(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ , on peut affirmer que  $\Delta_n(x)$  se factorise, une seule fois, par  $x$  quand  $n$  est pair, et ne se factorise pas par  $x$  quand  $n$  est impair.

Montrons simplement à présent que

$$P_{B_n}(x) = xQ(x) + ab\Delta_{n-4}(x).$$

Nous ne préciserons pas le polynôme  $Q$  mais nous aurons tout de même démontré le résultat voulu : 0 est racine simple du polynôme caractéristique d'une matrice  $B_n$  de dimension impaire, et n'est pas racine du polynôme caractéristique d'une matrice  $B_n$  de dimension paire.

Il suffit de quelques développements de déterminants. Le premier s'effectue par rapport aux coefficients de la dernière ligne :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & x & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & x & . & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 0 & . \\ . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 0 & a & . & x & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & b & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & x & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & x & . & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 0 & . \\ . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 0 & a & . & x & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & b & 0 & x \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & x & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & x & . & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 0 & . \\ . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 0 & a & . & x & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

On ne s'intéresse plus au premier déterminant puisque  $x$  est en facteur ; pour le second, on développe par rapport au 1 de la dernière colonne et on poursuit ainsi :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & x & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & x & . & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 0 & . \\ . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 0 & a & . & x & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & b & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & x & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & x & . & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 0 & . \\ . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 0 & a & . & x & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & b & 0 & x \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & x & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ 1 & 0 & x & . & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 0 & . \\ . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 0 & a & . & x & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & b & 0 & x \end{vmatrix}$$

Un ultime développement par rapport au seul coefficient non nul de la dernière colonne permet de conclure. CQFD.

### 4.3 La question des simplifications

Par “simplification”, on entend en fait “calcul modulo l’équation des ondes”. Par exemple, dans le cas des CLA d’ordre 3, on a effectué l’opération suivante :

$$-9 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -9 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

pour éliminer les dérivées spatiales d’ordre 2. Ceci nous a permis de passer de

$$7 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 9 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + 13 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \right) + 24 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

à

$$15 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 13 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \right) + 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 .$$

Rappelons que tout ceci n’est pas gratuit, mais d’un grand intérêt d’un point de vue numérique par exemple. Or, cette opération, a priori anodine, s’est révélée être une source d’interrogations : on a constaté que, pour les ordres supérieurs à 3, des simplifications pouvaient faire se dégénérer un système de CCC (voir annexe B, pour  $N = 4$  par exemple) : des CCC, au départ linéairement indépendantes ne le sont plus modulo l’équation des ondes. Ce phénomène n’est pas du tout illogique : imposer des CCC au coin ou l’équation des ondes, c’est imposer une certaine régularité à la solution. C’est sans doute pourquoi on assiste en quelque sorte à une redondance d’équations. Doit-on en déduire alors que l’équation des ondes est une condition de coin ?...

Cet écueil est le second que nous rencontrons. Déjà, nous n’avons pas compris clairement pourquoi le nombre de CCC était limité, égal au nombre que nous avons prévu. Autre source de difficultés : considérer deux conditions différentes sur chaque bord qui forment notre coin ; le nombre de CCC ne semble alors pas limité...

Que doit-on en conclure ? Le plus probable est sans doute que notre première approche, au départ purement empirique, n’est pas la bonne pour répondre à ces questions d’ordre plus général. Nos résultats relèvent pour l’instant plutôt de l’astuce, et il sera sans doute nécessaire de reprendre notre étude dans un autre cadre théorique pour comprendre les raisons de ces phénomènes.

Heureusement, il subsiste un outil et des conditions ont été explicitées.

## 4.4 La question de l'unicité

Une fois qu'on était parvenu à déterminer les CCC qui jusqu'à là faisaient défaut, on espérait bien pouvoir reprendre l'étude complète du problème au coin. Malheureusement, il n'en est rien car on vient buter sur la question de l'unicité des solutions, que nous n'avons établie jusqu'à maintenant que pour les solutions régulières. Or, la technique mise en œuvre dans ([2]) ne semble pas généralisable à des conditions d'ordre plus élevé que 2.

Toutefois, nous montrerons comment parvenir malgré tout à un premier résultat en établissant un lien avec les résultats de F. Collino (cf. [3]).

### 4.4.1 Le cas $C_2 \times C_2$

Sans la reprendre *in extenso*, on peut dire que la clé de la démonstration de l'unicité réside dans l'écriture d'une formulation faible du problème qui tient bien sûr compte de la condition de coin. On peut résumer ainsi la méthode mise en œuvre.

Le problème de départ qui est étudié est le suivant :

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \Gamma_y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{sur } \Gamma_x \\ \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial} + \frac{\partial u}{\partial} = 0 & \text{au coin} \end{array} \right.$$

problème auquel il faut ajouter des conditions initiales.

On notera que dans ce problème, on considère une classe entière de conditions de coins. (L'un des résultats les plus intéressants de [3] est que la condition au coin est optimale – en un certain sens – pour  $\gamma = \frac{3}{2}$ .)



La démonstration se poursuit par une formulation faible du problème ci-dessus, dont on peut montrer que toute solution vérifie

$$(4.14) \quad \frac{d^3}{dt^3} \left[ \int_{\Omega} uv \, dx \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left[ \int_{\Gamma} uv \, d\sigma \right] + \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \frac{\gamma}{2} u(0)v(0) \right] + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} d\sigma = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$$

Pour conclure à l'unicité des solutions, l'idée consiste alors à opérer une transformation de Laplace en temps du problème. Cela mène à l'étude de la forme bilinéaire

$$(4.15) \quad \hat{a}(p, \hat{u}, \hat{v}) = p^2 \int_{\Omega} \hat{u} \bar{\hat{v}} \, dx + p \int_{\Gamma} \hat{u} \bar{\hat{v}} \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla \hat{u} \cdot \nabla \bar{\hat{v}} \, dx + \frac{1}{2p} \int_{\Gamma} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} \frac{\partial \bar{\hat{v}}}{\partial \tau} d\sigma + \frac{\gamma}{2} \hat{u}(0) \bar{\hat{v}}(0)$$

On montre que cette forme bilinéaire est, pour l'espace de travail défini dans ([2]), elliptique quand  $\gamma > 0$ . On conclut grâce au lemme de Lax-Milgram.

Avant d'en présenter une alternative, nous ferons trois remarques quant à cette démonstration.

Premièrement, nous ne sommes pas parvenus à l'étendre au conditions d'ordre élevé; plus précisément, nous n'avons pas trouvé de formulation de nos problèmes qui conduisent, après transformation de Laplace, à une forme bilinéaire elliptique.

Ensuite, ceci est doublement regrettable, car outre le résultat d'unicité qui nous manque toujours, on peut penser que la question – toujours non résolue – de savoir si les problèmes définis dans ([9]) relève ou non de l'alternative de Fredholm aurait alors été réglée.

Enfin, cet “échec” nous inspire la règle suivante, assez générale en ce qui concerne les CLA: les conditions d'ordre 1 et 2 restent des cas particuliers. Autrement dit, réussir à traiter ces deux cas ne laisse en rien présumer de ce qui se passe dans le cas général. Par contre, conclure pour  $N$  supérieur ou égal à 3 est – toujours? – équivalent à conclure pour un  $N$  quelconque. On pense en faisant cette remarque non seulement à nos présentes difficultés à généraliser les résultats pourtant très complets, mais relatifs à l'ordre 2, contenus dans

([2]); on pense aussi aux travaux de D.W. Sheen, tous relatifs à l'ordre 2. On pense enfin à la formulation particulière de F. Collino, qui raisonne lui en terme de nombre de fractions rationnelles : le cas d'une et une seule fraction, la première, correspond à notre condition d'ordre 3.

#### 4.4.2 Une autre solution

Ne pouvant reprendre à notre compte la démarche adoptée dans ([2]) relative à l'unicité des solutions, nous avons alors essayé de rapprocher nos travaux de ceux de F. Collino dans ([3]), qui a travaillé sur le même sujet mais avec une formulation différente des opérateurs des conditions de bords. Cette idée était en réalité très tentante car nos résultats sont tout-à-fait complémentaires : F. Collino a montré l'unicité des solutions aux problèmes qu'il étudie sans toutefois pouvoir affirmer qu'il en existe ; pour notre part, nous savons qu'il existe une solution au problème du coin tel que nous le définissons et nous nous demandons si c'est la seule.

Nous ne présentons ici de démonstration que pour  $N = 3$ , démonstration pour laquelle nous remercions vivement F. Collino de sa collaboration. Nous ne considérerons pas le cas général bien que nous pensons qu'il soit redevable de techniques équivalentes (voir remarque ci-dessus).

On considère donc le problème suivant

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} - \frac{3}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0 & \text{sur } \Gamma_y \\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} - \frac{3}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 & \text{sur } \Gamma_x \\ 15 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 13 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \right) + 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 & \text{au coin} \end{array} \right.$$

De plus, les données initiales  $u_0$  et  $u_1$  seront supposées être à support strictement inclus dans  $\Omega$ .

Soit  $u$  une solution de ce problème (4.16). On lui associe  $\psi_u = (\psi_u^x, \psi_u^y)$  solution du problème (4.17) :

$$(4.17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 \psi_u^x}{\partial t^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \psi_u^x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & \text{sur } \Gamma_x \\ \frac{\partial^2 \psi_u^y}{\partial t^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \psi_u^y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & \text{sur } \Gamma_y \\ \begin{cases} \frac{\partial \psi_u^x}{\partial y} + 3 \frac{\partial \psi_u^x}{\partial t} - 2 \frac{\partial \psi_u^y}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \psi_u^y}{\partial x} + 3 \frac{\partial \psi_u^y}{\partial t} - 2 \frac{\partial \psi_u^x}{\partial t} = 0 \end{cases} & \text{au coin} \end{array} \right.$$

On pourra vérifier dans [1], ou bien encore dans [8] p 293, qu'il existe une unique solution à ce problème dès lors que  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2$ .

On est alors en droit de considérer le problème (4.18) – exactement du même type que le problème (4.17) – et qui n'est autre que la réécriture du problème (4.16) :

$$(4.18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial t} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial \psi_u^x}{\partial t} \right)}_{v_x} = 0 & \text{sur } \Gamma_x \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial t} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial \psi_u^y}{\partial t} \right)}_{v_y} = 0 & \text{sur } \Gamma_y \\ \begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{13}{7} \frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{8}{7} \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{13}{7} \frac{\partial v_y}{\partial t} - \frac{8}{7} \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \end{cases} & \text{au coin} \end{array} \right.$$

Donc, par le théorème déjà invoqué,  $v_x$  et  $v_y$  sont nulles puisque la solution du problème (4.18) est unique et que 0 est une solution évidente.

Finalement, on a montré que si  $u$  est solution de (4.16), alors  $u$  est aussi nécessairement solution de (4.19)

$$(4.19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial \psi_u^x}{\partial t} = 0 & \text{sur } \Gamma_x \\ \frac{\partial u}{\partial t} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial \psi_u^y}{\partial t} = 0 & \text{sur } \Gamma_y \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{13}{7} \frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{8}{7} \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{13}{7} \frac{\partial v_y}{\partial t} - \frac{8}{7} \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \end{array} \right. & \text{au coin} \end{array} \right.$$

Or, ceci est l'exacte formulation d'un problème – pour  $L = 1$  – étudié par F. Collino. On est donc parvenu au résultat souhaité : toute solution de notre problème est aussi solution d'un problème dont F. Collino a montré que la solution était unique. CQFD.

## Chapitre 5

# Annexe A : une propriété des CLA stables

### 5.1 introduction

Dans cet annexe, nous revenons sur le résultat, à notre connaissance nouveau, annoncé dans la première partie concernant la factorisation de l'opérateur d'une condition limite stable pour l'équation des ondes. Dans un premier temps, nous présentons ce résultat d'avantage comme une constatation algébrique que comme un théorème de stabilité. Ce n'est que dans un second temps que le lien avec le critère de Kreiss sera fait.

#### 5.1.1 Premier énoncé du résultat

Si l'on considère un opérateur de bord d'ordre  $N$  de la forme

$$B_N^{(t,y)} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right) \prod_{k=1}^N \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \prod_{j \neq k} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] \quad (5.1)$$

dont les coefficients vérifient

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N < 1 \quad (1) \\ \beta_k \geq 0, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2) \\ \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} < \gamma \quad (3) \end{array} \right.$$

nous affirmons qu'il est équivalent, pour toute fonction  $u$  suffisamment régulière solution de l'équation des ondes, à

$$(5.3) \quad B_N^{(t,y)}(u) \simeq \prod_i \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \prod_j \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu_j \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + \nu_j \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

avec

$$\lambda_i > 0 \quad (\forall i) \quad \text{et} \quad \mu_j > 0, \nu_j > 0 \quad (\forall j)$$

Ainsi formulée, cette précision complète notre démonstration d'existence de solution infiniment régulière au problème du coin.

En corollaire immédiat, on notera aussi la lecture suivante du résultat :

*Tout opérateur stable d'ordre  $N$  s'écrit comme la composition d'opérateurs stables d'ordre 1 ou 2*

En effet, il est connu que la condition

$$(5.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

est stable si et seulement si  $\alpha > 0$ . De même, la condition

$$(5.5) \quad \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

est équivalente à

$$(5.6) \quad (\gamma - \beta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

qui est stable si et seulement si  $0 < \beta < \gamma$  (cf. [5] par exemple).

### 5.1.2 Second énoncé du résultat

Revenons d'abord sur la définition de ce que nous avons appelé le “polynôme associé” à un opérateur de CLA. On sait par exemple que la condition limite

$$(5.7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

devient, après transformation de Laplace en temps ( $e^{st}$ ) et en espace ( $e^{\xi y}$ ),

$$(5.8) \quad (s + \gamma \xi) \tilde{u} = 0$$

Le polynôme ainsi obtenu étant homogène en  $s$  et  $\xi$ , on peut lui associer de façon bijective – vu l'isomorphisme entre l'espace des polynômes homogènes de degré  $N$  de deux variables et l'espace des polynômes de degré inférieur à  $N$  d'une seule variable – le polynôme à une seule indéterminée

$$(5.9) \quad 1 + \gamma X \quad \text{où} \quad X = \frac{\xi}{s}$$

De même qu'on associe  $1 + \gamma X$  à  $\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \frac{\partial u}{\partial y}$ , on associe à l'opérateur

$$(5.10) \quad B_N^{(t,y)} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right) \prod_{k=1}^N \left( (1 - \alpha_k) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^N \beta_k \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[ \prod_{j \neq k} \left( (1 - \alpha_k) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_j \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right]$$

le polynôme en  $X$

$$(5.11) \quad R_N(X) = (1 + \gamma X) \prod_{k=1}^N \left( (1 - \alpha_k) X^2 + \alpha_k \right) - X \sum_{k=1}^N \beta_k (X^2 - 1) \prod_{j \neq k} \left( (1 - \alpha_k) X^2 + \alpha_j \right)$$

Nous affirmons que la stabilité de l'opérateur  $B_N^{(t,y)}$  comme condition limite est équivalente à la non-positivité des parties réelles des racines de  $R_N(X)$ .

### 5.1.3 Commentaires

Notre proposition ainsi formulée, trois remarques s'imposent :

1. Il y a bien équivalence des deux énoncés. On remarquera notamment que  $1 + \gamma X$  associé à

$$(5.12) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ainsi que  $(\gamma - \beta)X^2 + X + \beta$  associé à

$$(5.13) \quad (\gamma - \beta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

n'admettent que des racines dont la partie réelle est négative (on sait que pour un polynôme de degré 2, une condition nécessaire et suffisante est que ses coefficients soient tous de même signe).

2. Le principal intérêt de la proposition réside dans ce que la stabilité d'une CLA **ne dépend pas** du type d'équation des ondes – anisotrope, à coefficients variables,... – vérifiée à l'intérieur du domaine de calcul. Seul compte l'opérateur de bord quand il est exprimé uniquement en fonction des dérivées temporelles et relatives à la coordonnée normale.
3. Les résultats de cette annexe ne font pas appel à des démonstrations originales, mais s'appuient en revanche sur les résultats déjà connus de ([11]) et de ([15]).

## 5.2 Lien avec les conditions de stabilité (5.2)

Dans ce paragraphe, nous démontrons l'équivalence des conditions de stabilité (5.2) avec notre critère algébrique. Tout l'intérêt de la démonstration réside dans le lemme 1 que nous énonçons ci-dessous et qui montre bien le lien que nous cherchons à mettre en évidence ; la suite de la démonstration est purement technique.



### 5.2.1 Lemmes

#### lemme 1

Soient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  tels que

$$0 < \alpha < 1 \quad , \quad 0 < \beta \quad , \quad \gamma - \frac{\beta}{1-\alpha} > 0$$

Alors, les racines du polynôme

$$R_0(X) = (1 + \gamma X) \left[ (1 - \alpha) X^2 + \alpha \right] - \beta X (X^2 - 1)$$

sont toutes de partie réelle strictement négative.

Démonstration : il suffit de développer le polynôme

$$R_0(X) = (1 - \alpha) \left( \gamma - \frac{\beta}{1 - \alpha} \right) X^3 + (1 - \alpha) X^2 + (\alpha\gamma + \beta)X + \alpha$$

et ensuite d'appliquer le théorème de Routh-Hurwitz (cf. [7] ou [4]) , à savoir dans le cas présent : notre résultat sera garanti si les quatre conditions suivantes sont remplies :

1.  $\alpha > 0$  et  $(1 - \alpha) > 0$  ce qui entraîne  $0 < \alpha < 1$ ,
2.  $(1 - \alpha) \left( \gamma - \frac{\beta}{1 - \alpha} \right) > 0$  ce qui entraîne  $\gamma - \frac{\beta}{1 - \alpha} > 0$ ,
3. et enfin  $(1 - \alpha) (\alpha\gamma + \beta) - \alpha(1 - \alpha) \left( \gamma - \frac{\beta}{1 - \alpha} \right) > 0$  ce qui, tout calcul effectué, équivaut exactement à  $\beta > 0$ .

Non seulement ces conditions sont remplies, mais de plus, on voit clairement apparaître le rôle des conditions (5.2) ; elles sont toutes aussi optimales vis-à-vis de notre critère que vis-à-vis des résultats classiques de stabilité.

**lemme 2**

*Le polynôme*

$$\sum_{k=1}^N \prod_{j \neq k}^N ((1 - \alpha_j)X^2 + \alpha_j)$$

*n'admet pas, sous l'hypothèse (5.2), de racine de partie réelle positive.*

Démonstration : il suffit pour conclure d'écarter les réels comme racines potentielles, puis de constater que

$$\operatorname{Im} \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{(1 - \alpha_k)(a + ib)^2 + \alpha_k} \right) = -2iab \sum_{k=1}^N (1 - \alpha_k) x A$$

où  $A$  est un facteur réel strictement positif, et le résultat est acquis.

**5.2.2 Cas des imaginaires purs**

Dans ce second paragraphe, nous allons montrer que le polynôme  $R_N(X)$  ne peut pas s'annuler sur l'axe des imaginaires purs.

Ecartons tout d'abord  $2N$  valeurs particulières, à savoir les  $\xi_k = \pm \sqrt{\frac{\alpha_k}{1 - \alpha_k}}$ .

En ces valeurs, on a en effet

$$(5.14) \quad R_N(\xi_k) = \frac{\beta_k \xi_k}{1 - \alpha_k} \prod_{j \neq k}^N \left( \alpha_j + \frac{1 - \alpha_j}{1 - \alpha_k} \right)$$

et donc, sous l'hypothèse (5.2) (et notamment  $\beta_k \neq 0$  et  $\alpha_k \neq 0$ ), les  $\xi_k$  ne peuvent être racines du polynôme.

Ce résultat étant établi, on peut poser  $R_N(X) = Q_N(X)f_N(X)$  avec

$$P_k(X) = (1 - \alpha_k)X^2 + \alpha_k \quad \text{et} \quad Q_N(X) = \prod_k^N P_k(X)$$

et

$$f_N(X) = \left[ 1 + \gamma X - X \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{X^2 - 1}{(1 - \alpha_k)X^2 + \alpha_k} \right]$$

Les  $\xi_k$  étant exactement les racines de  $Q_N(X)$ , on sait que ce polynôme ne s'annule pas en dehors de ces valeurs et il ne nous reste plus qu'à étudier la fonction  $f_N(X)$ . Or

$$(5.15) \quad f(ib) = 1 + ib \left( \gamma + \sum_{k=1}^N \eta \beta_k \frac{b^2 + 1}{\alpha_k - (1 - \alpha_k) b^2} \right)$$

La quantité entre parenthèses étant toujours réelle (éventuellement infinie ...), on en déduit que

$$(5.16) \quad \operatorname{Re}(f(ib)) = 1$$

et donc  $f_N$  ne s'annule pas sur l'axe des imaginaires purs. Ceci achève cette seconde partie de notre démonstration : le polynôme  $R_N(X)$  ne s'annule pas sur l'axe des imaginaires purs

### 5.2.3 Conclusion

Il est évident que

$$\left( \gamma - \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} > 0 \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{c} \exists \varepsilon_k (1 \leq k \leq N) \text{ tels que } \sum_{k=1}^N \varepsilon_k = 1 \\ \text{et} \\ \varepsilon_k \gamma - \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} > 0, \forall k \end{array} \right)$$

On peut alors écrire

$$(5.17) \quad R_N(X) = \sum_{k=1}^N \left[ (1 + \varepsilon_k \gamma X) Q_N(X) - \beta_k X (X^2 - 1) \prod_{j \neq k} P_j(X) \right]$$

puis factoriser  $Q_N(X)$  :

$$(5.18) \quad R_N(X) = Q_N(X) \sum_{k=1}^N \frac{(1 + \varepsilon_k \gamma X) P_k(X) - \beta_k X (X^2 - 1)}{P_k(X)}$$

(Attention :  $R_N(X)$  est un polynôme !)

Il nous reste pour conclure à utiliser l'argument suivant lequel une modification continue des coefficients d'un polynôme entraîne une évolution continue de ses racines dans le plan complexe. Dans (5.18), faisons tendre d'abord chaque  $\varepsilon_k$  vers 1, puis chaque  $\beta_k$  vers  $\beta$ , le minimum des  $\beta_k$ , et enfin chaque  $\alpha_k$  vers  $\alpha$ , le minimum des  $\alpha_k$ . Ce faisant, les conditions (5.2) sont vérifiées à chaque instant, et le polynôme obtenu par passage à la limite vaut

$$(5.19) \quad R(X) = R_0(X) Q_N(X) \sum_{k=1}^N \frac{1}{P_k(X)}$$

avec  $R_0(X) = (1 + \gamma X) [(1 - \alpha) X^2 + \alpha] - \beta X (X^2 - 1)$

(On reconnaît en  $R_0(X)$  le polynôme de degré 3 étudié dans le lemme.) La fin de la démonstration est alors la suivante :

1. On constate que  $R(X)$  n'admet pas de racines de partie réelle positive (voir lemme 1 et 2).
2. On sait, grâce à l'étude du paragraphe précédent, que l'axe des imaginaires purs n'a été franchi par aucune racine car les conditions (5.2) ont toujours été vérifiées.

On peut donc conclure que le polynôme  $R_N(X)$  n'admet pas de racines de partie réelle positive. CQFD.

### 5.3 Lien avec le critère de Kreiss

Dans ce dernier paragraphe, nous allons voir en quoi il est équivalent de s'assurer du critère de Kreiss ou du fait que  $R_N(X)$  n'admette aucune racine de partie réelle positive ou nulle.

Considérons le problème suivant, constitué d'une part d'une équation des ondes sur  $\Omega = \{(x, y)/y < 0\}$  – équation de type très général –, et d'autre part d'une CLA sur  $\Gamma = \{(x, y)/y = 0\}$  :

$$(5.20) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{sur } \Omega \quad (\text{avec } a > 0 \text{ et } b > 0) \\ B_N^{(t,y)}(u) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Suivant la théorie de Kreiss, on s'intéresse aux solutions de ce problème de la forme :

$$(5.21) \quad u(x, y, t) = C e^{ikx} e^{\xi y} e^{st} \quad (\text{avec } k \text{ réel})$$

Deux relations doivent alors être vérifiées par  $s$ ,  $\xi$  et  $k$  : la relation de dispersion

$$(5.22) \quad s^2 = b \xi^2 - a k^2$$

et, sur le bord,

$$(5.23) \quad RR_N(s, \xi) = 0 \Leftrightarrow R_N(X) = 0 \quad \text{avec } X = \frac{\xi}{s}$$

Nous allons montrer que, si  $Re(X) < 0$ , alors on ne peut pas avoir à la fois  $Re(s) > 0$  et  $Re(\xi) > 0$ .

Pour ce faire, on pose  $s = r e^{i\theta}$  et  $\xi = r' e^{i\theta'}$ . Avec ces notations, notre conclusion devient : on ne peut pas avoir à la fois  $\cos(\theta) > 0$  et  $\cos(\theta') > 0$ .

D'une part, la relation de dispersion (5.22) nous permet d'affirmer que

$$s^2 - b \xi^2 \in \mathbb{R}$$

et donc que

$$(5.24) \quad r^2 \sin 2\theta - b r'^2 \sin 2\theta' = 0$$

soit encore

$$(5.25) \quad r^2 \cos \theta \sin \theta - b r'^2 \cos \theta' \sin \theta' = 0$$

D'autre part, le fait que  $Re(X) < 0$  s'écrit, vu que  $X = \frac{r}{b r'} e^{i(\theta - \theta')}$ ,

$$(5.26) \quad \cos(\theta - \theta') < 0$$

soit encore

$$(5.27) \quad \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' < 0$$

Posons alors

$$\sin \theta = \varepsilon \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

et de même

$$\sin \theta' = \varepsilon' \sqrt{1 - \cos^2 \theta'} \quad \text{avec } \varepsilon' = \pm 1$$

Nos deux relations s'écrivent alors

$$(5.28) \quad \varepsilon r^2 \cos \theta \sqrt{1 - \cos^2 \theta} - \varepsilon' b r'^2 \cos \theta' \sqrt{1 - \cos^2 \theta'} = 0$$

et

$$(5.29) \quad \cos \theta \cos \theta' + \varepsilon \varepsilon' \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \sqrt{1 - \cos^2 \theta'} < 0$$

De (5.28), on tire que

$$(5.30) \quad \cos \theta' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \frac{r}{b r'} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta'}} \cos \theta$$

et ce résultat, en remarquant que  $\varepsilon \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ , donne dans (5.29)

$$(5.31) \quad \varepsilon \varepsilon' \left[ \frac{r}{b r'} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta'}} \cos^2 \theta + \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \sqrt{1 - \cos^2 \theta'} \right] < 0$$

On en conclut que nécessairement  $\varepsilon \varepsilon' < 0$ , ce qui, vue (5.30), entraîne la conclusion souhaitée :  $\cos \theta$  et  $\cos \theta'$  sont de bien signe opposé.

## Chapitre 6

### Annexe B : exemples de CCC

Pour illustrer notre propos, nous donnons ici quelques exemples de CCC, obtenues à l'aide du programme présenté dans l'annexe suivante. Le principal intérêt de cette annexe est de constater les dégâts causés par la simplification modulo l'équation des ondes (voir en particulier le cas  $N = 5$ ). On verra aussi à quelle vitesse les coefficients des conditions augmentent avec  $N \dots$

- **CCC pour N=3**

$$15 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 13 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} \right) + 7 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

- **CCC pour N=4**

On a cherché grâce à MAPLE symétriser les expressions des CCC :

$$\left\{ \begin{array}{l} 119 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + 112 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + 112 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} + 96 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x \partial y} + 12 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 12 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 \\ 8 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} - 8 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} + 7 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - 7 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2} + 4 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2} = 0 \end{array} \right.$$

On reconnaît en la troisième CCC l'équation des ondes elle-même!! D'où les problèmes liés à la simplification des CCC...

### • CCC pour N=5

(On revient à des notations polynômiales pour des raisons de taille des opérateurs.)

Avant simplification, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 225 ty^2 x - 736 t^3 x + 340 t^2 y^2 - 800 t^4 + 25 x^4 + 25 y^4 - 736 t^3 y + 340 t^2 x^2 \\ \quad + 313 ty^3 + 313 tx^3 + 50 x^2 y^2 + 221 xy^3 - 672 t^2 xy + 221 x^3 y + 225 tx^2 y = 0 \\ 12608 t^3 x - 10817 ty^2 x - 19620 t^2 y^2 - 4695 x^4 + 4695 y^4 - 12608 t^3 y \\ \quad + 19620 t^2 x^2 - 3113 ty^3 + 3113 tx^3 - 2189 xy^3 + 2189 x^3 y + 10817 tx^2 y = 0 \\ 22 x^3 y - 50 x^4 - 22 xy^3 + 50 y^4 + 30 tx^3 + 110 tx^2 y - 110 ty^2 x \\ \quad - 30 ty^3 + 200 t^2 x^2 - 200 t^2 y^2 + 128 t^3 x - 128 t^3 y = 0 \end{array} \right.$$

Après simplification :

$$\left\{ \begin{array}{l} 435 t^4 + 423 t^3 y + 423 t^3 x + 451 t^2 xy + 88 tx^2 y + 88 ty^2 x = 0 \\ 79 t^3 x - 79 t^3 y - 75 t^2 y^2 + 75 t^2 x^2 + 11 x^3 y - 11 xy^3 + 70 tx^2 y - 70 ty^2 x = 0 \\ 79 t^3 x - 79 t^3 y - 75 t^2 y^2 + 75 t^2 x^2 + 11 x^3 y - 11 xy^3 + 70 tx^2 y - 70 ty^2 x = 0 \end{array} \right.$$

Une fois encore, les simplifications via l'équation des ondes ont un effet désastreux.

### • CCC pour N=6

Avant simplification, on obtient :



$$\left\{ \begin{array}{l}
-383008 t^2 x^3 - 2895936 t^2 y^2 x - 235656 t x y^3 + 3412768 t^4 x - 4447856 t^3 y^2 \\
+ 1447974 t y^4 + 415844 y^4 x + 1447974 t x^4 + 6207680 t^5 + 86292 x^5 \\
+ 86292 y^5 - 29860 x^2 y^3 - 235656 t x^3 y - 2895936 t^2 x^2 y + 617856 t^3 x y \\
+ 3412768 t^4 y + 415844 x^4 y - 4447856 t^3 x^2 - 29860 x^3 y^2 - 383008 t^2 y^3 = 0 \\
1824 t^2 x^3 + 13920 t^2 y^2 x + 1124 t x y^3 - 16384 t^4 x + 21376 t^3 y^2 - 6963 t y^4 \\
- 2002 y^4 x - 6963 t x^4 - 29824 t^5 - 410 x^5 - 410 y^5 + 146 x^2 y^3 \\
+ 1124 t x^3 y + 13920 t^2 x^2 y - 2944 t^3 x y - 16384 t^4 y - 2002 x^4 y \\
+ 21376 t^3 x^2 + 146 x^3 y^2 + 1824 t^2 y^3 = 0 \\
3648 t^2 x^3 + 27776 t^2 y^2 x + 2248 t x y^3 - 32704 t^4 x + 42656 t^3 y^2 - 13892 t y^4 \\
- 3992 y^4 x - 13892 t x^4 - 59520 t^5 - 820 x^5 - 820 y^5 + 292 x^2 y^3 \\
+ 2 t x^2 y^2 + 2248 t x^3 y + 27776 t^2 x^2 y - 5888 t^3 x y \\
- 32704 t^4 y - 3992 x^4 y + 42656 t^3 x^2 + 292 x^3 y^2 + 3648 t^2 y^3 = 0 \\
300640 t^2 x^3 - 501760 t^2 y^2 x - 163800 t x y^3 + 335200 t^4 x - 770640 t^3 y^2 \\
+ 250890 t y^4 + 72060 y^4 x - 250890 t x^4 - 104540 x^5 + 104540 y^5 \\
+ 5180 x^2 y^3 + 163800 t x^3 y + 501760 t^2 x^2 y - 335200 t^4 y \\
- 72060 x^4 y + 770640 t^3 x^2 - 5180 x^3 y^2 - 300640 t^2 y^3 = 0 \\
480 t^2 y^2 x - 288 t^2 x^3 + 156 t x y^3 - 320 t^4 x + 736 t^3 y^2 - 241 t y^4 - 70 y^4 x \\
+ 241 t x^4 + 102 x^5 - 102 y^5 - 6 x^2 y^3 - 156 t x^3 y - 480 t^2 x^2 y \\
+ 320 t^4 y + 70 x^4 y - 736 t^3 x^2 + 6 x^3 y^2 + 288 t^2 y^3 = 0
\end{array} \right.$$

INRIA

Après simplification :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3207798 t^5 + 3116052 t^4 x + 3116052 t^4 y - 2183376 t^2 x^2 y - 2183376 t^2 y^2 x \\ \quad - 2895948 t x^2 y^2 - 531996 x^3 y^2 - 531996 x^2 y^3 + 382200 t^3 x y = 0 \\ -15411 t^5 - 14970 t^4 x - 14970 t^4 y + 10504 t^2 x^2 y + 10504 t^2 y^2 x \\ \quad + 13926 t x^2 y^2 + 2558 x^3 y^2 + 2558 x^2 y^3 - 1820 t^3 x y = 0 \\ -30756 t^5 - 29876 t^4 y - 29876 t^4 x + 20956 t^2 x^2 y + 20956 t^2 y^2 x \\ \quad + 27786 t x^2 y^2 + 5104 x^3 y^2 + 5104 x^2 y^3 - 3640 t^3 x y = 0 \\ 506 t^4 x - 506 t^4 y - 495 t^3 y^2 + 495 t^3 x^2 + 156 t x^3 y - 156 t x y^3 \\ \quad - 26 x^2 y^3 + 26 x^3 y^2 + 596 t^2 x^2 y - 596 t^2 y^2 x = 0 \\ 506 t^4 x - 506 t^4 y - 495 t^3 y^2 + 495 t^3 x^2 + 156 t x^3 y - 156 t x y^3 \\ \quad - 26 x^2 y^3 + 26 x^3 y^2 + 596 t^2 x^2 y - 596 t^2 y^2 x = 0 \end{array} \right.$$

Sans commentaire.

## Chapitre 7

# Annexe C : explicitation des CCC grâce à MAPLE

### 7.1 Le programme principal

```
# on charge les outils dont on aura besoin : #
# algebre lineaire et analyse combinatoire    #
with(linalg):
with(combinat):

E0:=t*t-x*x-y*y;    # equation des ondes #

read(pgm2);    # determine les CLA #

N:=degree(E1,t);    # ordre des CLA #

    # ordre des calculs #
Cal:=3*(2*trunc(N/2)-1)+4*(N/2-trunc(N/2))-1;

Dim_mult0:=0:
for i from 0 to (Cal-N) do
Dim_mult0:=Dim_mult0+numbcomp(Cal-i,2)
od:
```

---

```

Mult0:=array(1..Dim_mult0):  # pour multiplier E0 #
k:=1:
for i from 0 to (Cal-N) do
    L0:=composition(Cal-i,2):
    n:=numbcomp(Cal-i,2):
    for j from 1 to n do
        Px:=op(1,op(j,L0))-1:
        Py:=op(2,op(j,L0))-1:
        Mult0[k]:=t^i*x^Px*y^Py:
        k:=k+1:
    od:
od:

Dim_mult1:=numbcomp(Cal-N+2,2):

Mult1:=array(1..Dim_mult1):  # pour multiplier E1 #
L1:=composition(Cal-N+2,2):
for j from 1 to Dim_mult1 do
    Pt:=op(1,op(j,L1))-1:
    Px:=op(2,op(j,L1))-1:
    Mult1[j]:=t^Pt*x^Px:
od:

Dim_mult2:=numbcomp(Cal-N+2,2):

# pour multiplier E2 #
Mult2:=array(1..Dim_mult2):
L2:=composition(Cal-N+2,2):
for j from 1 to Dim_mult2 do
    Pt:=op(1,op(j,L2))-1:
    Py:=op(2,op(j,L2))-1:
    Mult2[j]:=t^Pt*y^Py:
od:

```

---

```

    # nb de lignes de la matrice M #
Dim_base2:=Dim_mult0+Dim_mult1+Dim_mult2;

# jeu d'equation #
E:=array(1..Dim_base2):

for i from 1 to Dim_mult0 do
    E[i]:=expand(E0*Mult0[i])
od:

for i from 1 to Dim_mult1 do
    E[Dim_mult0+i]:=expand(E1*Mult1[i])
od:

for i from 1 to Dim_mult2 do
    E[Dim_mult0+Dim_mult2+i]:=expand(E2*Mult2[i])
od:

# nb de colonnes de la matrice M #
Dim_base:=0:
for i from 0 to Cal do
    Dim_base:=Dim_base+numbcomp(Cal-i+2,2)
od:

Dim_base1:=Dim_base-Dim_base2;

Base:=array(1..Dim_base):
#          variables de base          #
# attention : leur ordre n'est pas celui #
# qui permet de mettre en evidence     #
# la structure decrite en theorie       #

k:=1:
for i from 0 to Cal do
    Lb:=composition(Cal-i+2,2):

```

```

n:=numbcomp(Cal-i+2,2):
for j from 1 to n do
    Px:=op(1,op(j,Lb))-1:
    Py:=op(2,op(j,Lb))-1:
    Base[k]:=t^i*x^Px*y^Py:
    k:=k+1:
od:
od:

# servira a symetriser les CCC #
Base_anti:=array(1..Dim_base):
k:=1:
for i from 0 to Cal do
    Lb:=composition(Cal-i+2,2):
    n:=numbcomp(Cal-i+2,2):
    for j from 1 to n do
        Px:=op(2,op(j,Lb))-1:
        Py:=op(1,op(j,Lb))-1:
        Base_anti[k]:=t^i*x^Px*y^Py:
        k:=k+1:
    od:
od:

M:=matrix(Dim_base2,Dim_base): # construction de M #

for i from 1 to Dim_base2 do
    for j from 1 to Dim_base do
        Pt:=degree(Base[j],t):
        Px:=degree(Base[j],x):
        Py:=degree(Base[j],y):
        F:=E[i]:
        if Pt>0 then F:=coeff(collect(F,t),t^Pt) fi:
        if Px>0 then F:=coeff(collect(F,x),x^Px) fi:
        if Py>0 then F:=coeff(collect(F,y),y^Py) fi:
        M[i,j]:=F:
    end for
end for

```

```

                                od;
                                od;

M1:=submatrix(M,1..Dim_base2,Dim_base2+1..Dim_base):
  M1t:=transpose(M1):
M2:=submatrix(M,1..Dim_base2,1..Dim_base2):  # matrice N #
  M2t:=transpose(M2):

Esp_prp:=nullspace(M2t):

Nb_de_cond:=nops(Esp_prp);  # nb de conditions #

for i from 1 to Nb_de_cond do
  convert(op(i,Esp_prp),vector):
  cond[i]:=multiply(M1t,op(i,Esp_prp)):
  od:

  # ecriture symetrique #

for i from 1 to Nb_de_cond do
  cc[i]:=0:
  convert(cond[i],vector):
  for j from Dim_base2+1 to Dim_base do
    cc[i]:=cc[i]
    +cond[i][j-Dim_base2]*Base[j]/t^(Cal-N+1):
  od:
  od:

  # ecriture antisymetrique #

for i from 1 to Nb_de_cond do
  cc[i+Nb_de_cond]:=0:
  convert(cond[i],vector):
  for j from Dim_base2+1 to Dim_base do
    cc[i+Nb_de_cond]:=cc[i+Nb_de_cond]

```

---

```

+cond[i][j-Dim_base2]*Base_anti[j]/t^(Cal-N+1):
                                od:
                        od:

P:=matrix(2*Nb_de_cond,Dim_base1):
P:=scalarmul(P,0):
rang:=0:
k:=1:

# on ne garde bien sur que les CCC independantes #

for i from 1 to 2*Nb_de_cond do
  for j from 1 to Dim_base1 do
    Pt:=degree(Base[Dim_base2+j],t):
    Px:=degree(Base[Dim_base2+j],x):
    Py:=degree(Base[Dim_base2+j],y):
    F:=expand(cc_sym[i]*t^(Cal-N+1)):
    if Pt>0 then F:=coeff(collect(F,t),t^Pt) fi:
    if Px>0 then F:=coeff(collect(F,x),x^Px) fi:
    if Py>0 then F:=coeff(collect(F,y),y^Py) fi:
    P[i,j]:=F:
                                od:
  r:=rank(P);
  if (r-rang=1) then
    cc_fin[k]:=cc_sym[i]:
    rang:=r:
    k:=k+1:
  fi:
  od;

# affichage #
for i from 1 to Nb_de_cond do print(cc_fin[i]);od;

#####
#               partie simplification               #

```



```
#####
```

```
for k from 1 to Nb_de_cond do
    mult:=1;
    pol_t:=collect(cc_fin[k],t);
    if degree(pol_t,t)=N-1 then sym:=true:
        else sym:=false :
    fi;
    pol:=tcoeff(pol_t,t);
    pol_t:=pol_t-pol;
    dd:=degree(pol,x);
    if type(dd,even) then pair:=true:
        else pair:=false: fi;
    if pair and not(sym) then mult:=x*x-y*y;
    fi;
    if not(pair) and sym then mult:=x+y; fi;
    if not(pair) and not(sym) then mult:=x-y;
    fi;
    divide(pol,mult,'pol');
    dd:=degree(pol,x);

    if dd>1 then for j from 0 to dd/2-1 do
    Pxy:=dd-j;
    co_x:=coeff(collect(pol,x),x^Pxy);
    co_y:=coeff(collect(pol,y),y^Pxy);
    if (co_x*x^(Pxy-2)-co_y*y^(Pxy-2)=0)
        then co_x:=co_x/2; co_y:=co_y/2; fi;
    pol:=expand(pol+(t*t-x*x-y*y)*
        (co_x*x^(Pxy-2)+co_y*y^(Pxy-2)));
        od;
    fi;

    pol:=expand(pol*mult);
    pol_t:=collect(expand(pol_t+pol),t);
```

---

```

for i from 1 to N-3 do
    mult:=1;
    pol:=coeff(pol_t,t^i);
    pol_t:=pol_t-pol*t^i;
    dd:=degree(pol,x);
    if type(dd,even) then pair:=true:
    else pair:=false:
fi:
if pair and not(sym) then mult:=x*x-y*y;
fi;
if not(pair) and sym then mult:=x+y;
fi;
if not(pair) and not(sym) then mult:=x-y;
fi;

    divide(pol,mult,'pol');
    dd:=degree(pol,x);

    if dd>1 then
        for j from 0 to dd/2-1 do
            Pxy:=dd-j;
            co_x:=coeff(collect(pol,x),x^Pxy);
            co_y:=coeff(collect(pol,y),y^Pxy);
            if (co_x*x^(Pxy-2)-co_y*y^(Pxy-2)=0)
            then co_x:=co_x/2; co_y:=co_y/2;
            fi;
            pol:=expand(pol+(t*t-x*x-y*y)*
                (co_x*x^(Pxy-2)+co_y*y^(Pxy-2)));
            od;
        fi;
        pol:=expand(pol*mult);
        pol_t:=
            collect(expand(pol_t+t^i*pol),t);
            od;

cc_fina[k]:=factor(pol_t):

```

```

        if type(op(1,cc_fina[k]),integer)
        then cc_fina[k]:=expand(pol_t/op(1,cc_fina[k])):
        fi:
        cc_fina[k]:=expand(cc_fina[k]);
        od;

# affichage #
for i from 1 to Nb_de_cond do print(cc_fina[i]);od;

```

## 7.2 Le programme de calcul des CLA issues de l'approximation de Padé

```

Eint1:=t+y:  # condition d'ordre 1 en y #

Eint2:=t*t+t*y-1/2*x*x:  # condition d'ordre 2 en y #

for i from 1 to 6-2 do      # calcul reccurent #
    Eint3:=expand(t*Eint2-1/4*x*x*Eint1):
    Eint1:=Eint2:
    Eint2:=Eint3:
od:

E1:=Eint2;  # donnee pour le programme principal #

##### et on se repete #####

Eint1:=t+x:  # condition d'ordre 1 en x #

Eint2:=t*t+t*x-1/2*y*y:  # condition d'ordre x en x #

for i from 1 to 6-2 do      # calcul reccurent #
    Eint3:=expand(t*Eint2-1/4*y*y*Eint1):
    Eint1:=Eint2:

```

```

        Eint2:=Eint3:
    od:

E2:=Eint2;    # donnee pour le programme principal #

```

### 7.3 Le programme de calcul des CLA dans le cas général

```

L:=2;    # le calcul est fait pour N = 2L+1 = 5 #

alpha:=array(1..L,[(3+sqrt(5))/8,(3-sqrt(5))/8]);

beta:=array(1..L,[(1/4)*(1-sqrt(5)/5),(1/4)*(1+sqrt(5)/5)]);

gamma:=1:

q:=1:
for i from 1 to L do q:=q*(t*t-alpha[i]*x*x); od;
q:=expand(q);
convert(q,polynom);

for j from 1 to L do
qk[j]:=1:
for i from 1 to L do
    if i<>j then qk[j]:=qk[j]*(t*t-alpha[i]*x*x); fi;
    od;
qk[j]:=expand(qk[j]);
convert(qk[j],polynom);
od;

prod_qk:=0:
for i from 1 to L do convert(qk[i],polynom):

```

---

```

        prod_qk:=prod_qk+beta[i]*qk[i]*x*x:
    od :

E1:=expand(y*q+gamma*t*q-prod_qk*t);

##### et on se repete #####

q:=1:
for i from 1 to L do q:=q*(t*t-alpha[i]*y*y): od:
q:=expand(q):
convert(q,polynom):

for j from 1 to L do
qk[j]:=1:
for i from 1 to L do
    if i<>j then qk[j]:=qk[j]*(t*t-alpha[i]*y*y); fi;
    od;
qk[j]:=expand(qk[j]);
convert(qk[j],polynom);
od;

prod_qk:=0:
for i from 1 to L do convert(qk[i],polynom):
    prod_qk:=prod_qk+beta[i]*qk[i]*y*y:
    od :

E2:=expand(x*q+gamma*t*q-prod_qk*t);

end;
```

## Bibliographie

- [1] A. BAMBERGER. *Analyse, contrôle et identification de certains systèmes*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1978.
- [2] A. BAMBERGER, P. JOLY, and J.E. ROBERTS. Second order absorbing boundary conditions for the wave equation: a solution for the corner problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(2):323–352, Avril 1990.
- [3] F. COLLINO. Conditions absorbantes d'ordre élevé pour des modèles de propagation d'onde. Technical Report 1790, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, avril 1993.
- [4] R. DAUTRAY and J.L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique*. Masson, 1987.
- [5] T. HA DUONG and P. JOLY. On the stability analysis of boundary conditions for the wave equation by energy methods. part 1: The homogeneous case. Technical Report 1306, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, Octobre 1990.
- [6] B. ENGQUIST and A. MAJDA. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139):629–651, Juillet 1977.
- [7] F.R. GANTMACHER. *Théorie des matrices*. Dunod, 1966.
- [8] J. L. JIONS. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1987.

- [9] P. JOLY and O. VACUS. Stabilité de conditions aux limites pour l'équation de helmholtz. Technical report, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, à paraître.
- [10] P. JOLY and O. VACUS. Stabilité de conditions aux limites pour l'équation des ondes par des méthodes énergétiques : le cas des bords courbes. Technical report, I.N.R.I.A., Domaine de de Voluceau Rocquencourt, B.P.105, 78153, Le Chesnay Cedex France, à paraître.
- [11] H.O. KREISS. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems.i. *Math. Comp.*, 22:703–714, 1968.
- [12] D-W SHEEN. Second order absorbing boundary conditions for the wave equation : Higher order energies and finite element methods. *Computing methods in applied sciences and engineering*, pages 207–215, 1986.
- [13] D-W SHEEN. Absorbing boundary conditions for wave transmissions. Technical report, Purdue University, July 1991.
- [14] D-W SHEEN. On the wave equation in a half plan with second order absorbing boundary conditions. Technical report, Purdue University, Februar 1991.
- [15] L. TREFETHEN and L. HALPERN. Well posedness of one way equations and absorbing boundary conditions. *Math. Comp.*, 47:437–459, 1986.

# Table des matières

|          |                                                                |           |
|----------|----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                            | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Existence de solutions régulières</b>                       | <b>7</b>  |
| 2.1      | Préliminaires . . . . .                                        | 7         |
| 2.2      | Définition du problème . . . . .                               | 9         |
| 2.3      | Démonstration de l'existence . . . . .                         | 10        |
| <b>3</b> | <b>Une extension des méthodes énergétiques</b>                 | <b>14</b> |
| 3.1      | Des résultats dans le cas $C_2 \times C_2$ : rappels . . . . . | 14        |
| 3.2      | Généralisation pour des CLA d'ordre $N$ . . . . .              | 17        |
| 3.3      | Applications . . . . .                                         | 23        |
| <b>4</b> | <b>Des conditions de coins par compatibilité</b>               | <b>25</b> |
| 4.1      | Le cas $C_2 \times C_2$ . . . . .                              | 27        |
| 4.2      | Détermination des CCC . . . . .                                | 28        |
| 4.2.1    | Un problème algébrique non trivial . . . . .                   | 29        |
| 4.2.2    | Un exemple simple . . . . .                                    | 30        |
| 4.2.3    | Le cas général . . . . .                                       | 34        |
| 4.2.4    | Le lemme . . . . .                                             | 42        |
| 4.3      | La question des simplifications . . . . .                      | 44        |
| 4.4      | La question de l'unicité . . . . .                             | 45        |
| 4.4.1    | Le cas $C_2 \times C_2$ . . . . .                              | 45        |
| 4.4.2    | Une autre solution . . . . .                                   | 47        |
| <b>5</b> | <b>Annexe A : une propriété des CLA stables</b>                | <b>50</b> |
| 5.1      | introduction . . . . .                                         | 50        |



---

|          |                                                                              |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.1.1    | Premier énoncé du résultat . . . . .                                         | 50        |
| 5.1.2    | Second énoncé du résultat . . . . .                                          | 52        |
| 5.1.3    | Commentaires . . . . .                                                       | 53        |
| 5.2      | Lien avec les conditions de stabilité (5.2) . . . . .                        | 53        |
| 5.2.1    | Lemmes . . . . .                                                             | 54        |
| 5.2.2    | Cas des imaginaires purs . . . . .                                           | 55        |
| 5.2.3    | Conclusion . . . . .                                                         | 56        |
| 5.3      | Lien avec le critère de Kreiss . . . . .                                     | 57        |
| <b>6</b> | <b>Annexe B : exemples de CCC</b>                                            | <b>60</b> |
| <b>7</b> | <b>Annexe C : explicitation des CCC grâce à MAPLE</b>                        | <b>64</b> |
| 7.1      | Le progamme principal . . . . .                                              | 64        |
| 7.2      | Le progamme de calcul des CLA issues de l'approximation de<br>Padé . . . . . | 72        |
| 7.3      | Le progamme de calcul des CLA dans le cas général . . . . .                  | 73        |



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399